Niedersächsisches Kultusministerium
Niedersächsisches Ministerium für Wissenschaft und Kultur

MINT in Niedersachsen

Mathematik für einen erfolgreichen Studienstart

Niedersachsen

MINT in Niedersachsen

Mathematik für einen erfolgreichen Studienstart

Basispapier Mathematik

Ergebnis des Institutionalisierten Gesprächskreises Mathematik Schule-Hochschule IGeMa

Vorwort

Fotos:
Björn Thümler (links) und
Grant Hendrik Tonne (rechts)

Mathematik ist der Schlüssel für einen erfolgreichen Start in ein MINT-Studium. Die Absolventinnen und Absolventen der Studiengänge aus den Bereichen Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik sind dringend benötigte Fachkräfte für die Entwicklung unserer Wirtschaft und Gesellschaft im Zeitalter des digitalen Wandels. Es ist eines der wichtigsten Ziele der Niedersächsischen Landesregierung, sicherzustellen, dass es auch künftig genügend Fachkräfte gibt. Die bisherigen Anstrengungen im Bereich der akademischen Fachkräftesicherung sind bereits sehr erfolgreich. Dennoch bleibt die weitere Verbesserung der Studienorientierung und des MINT-Studienerfolgs eine wichtige Aufgabe der Landesregierung.

Das Niedersächsische Ministerium für Wissenschaft und Kultur sowie das Niedersächsische Kultusministerium arbeiten bei dieser Aufgabe eng zusammen und beziehen alle relevanten Akteure mit ein. Die vorliegende Veröffentlichung ist das Ergebnis dieser Zusammenarbeit. Mit dem Basispapier Mathematik wollen wir deutlich machen, wie wichtig die Schnittstelle Schule – Hochschule für den Studienerfolg ist und anhand von Beispielaufgaben veranschaulichen, welche mathematischen Kompetenzen erforderlich sind, um erfolgreich ein MINT-Studium an einer niedersächsischen Fachhochschule oder Universität zu beginnen.

Das Basispapier Mathematik ist ein Transparenzinstrument für den guten Start in ein MINT-Studium in Niedersachsen. Es soll studieninteressierten Schülerinnen und Schülern als Informationsquelle dienen und wird daher auch auf unserem Online-Informationsportal „MINT in Niedersachsen. Dein Studium. Deine Perspektiven.“ (www.mint-in-niedersachsen.de) veröffentlicht. Ebenso richtet es sich an Lehrende aus Schule und Hochschule, denen es als Grundlage für weitere Schritte zur Verbesserung der Schnittstelle Schule – Hochschule und der Stärkung des MINT-Studienerfolgs dienen soll.

In der vorliegenden Form ist das Basispapier Mathematik deutschlandweit einzigartig. Dies betrifft inhaltliche Punkte wie die Einführung eines Kategoriensystems für die Beispielaufgaben, den Verweis auf die bundesweit geltenden Bildungsstandards mit ihren Leitideen, die ergänzenden Kommentare sowie die Beschreibung der unterschiedlichen Sichtweisen von Schule und Hochschule auf Mathematik.

Der Landeshochschulkonferenz, ebenso der Landesschulbehörde und insbesondere dem Institutionalisierten Gesprächskreis Mathematik Schule – Hochschule gilt unser besonderer Dank.

Wir sind überzeugt, dass das Basispapier Mathematik sehr hilfreich ist: für Studieninteressierte als Orientierungshilfe zur Aufnahme eines MINT-Studiums einerseits, für Expertinnen und Experten zur fachlichen Diskussion andererseits.

Für Sie und mit Ihnen wollen wir Zukunft gestalten und zum MINT-Studienerfolg und damit zur Fachkräftesicherung beitragen. Wir wünschen Ihnen eine informative und interessante Lektüre.

Björn Thümler
Niedersächsischer Minister für Wissenschaft und Kultur

Grant Hendrik Tonne
Niedersächsischer Kultusminister

Inhalt

1. Präambel 8
2. Sichtweisen auf Mathematik von Schule und Hochschule 10
2.1 Analysis 10
2.2 Geometrie und Lineare Algebra 11
2.3 Stochastik 11
3. Illustrierende Beispielaufgaben 12
3.1 Elementare Algebra 15
3.2 Elementare Geometrie/Trigonometrie 24
3.3 Elementare Funktionen 28
3.4 Anwendungen 36
3.5 Analysis 42
3.6 Lineare Algebra/Analytische Geometrie 52
3.7 Stochastik 54
4. Kompetenzen 60
4.1 Kompetenzen gemäß der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (MSA) 60
4.2 Kompetenzen gemäß der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (AHR) 63
5. Anhang 66
5.1 Abbildungsverzeichnis 66

1. Präambel

Aufgrund der besonderen Bedeutung der Mathematik an der Schnittstelle Schule-Hochschule (Universitäten und Fachhochschulen) für den Studienerfolg in den Studienfächern Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik (MINT) haben sich auf Anregung der Landesregierung und unter Koordination des Niedersächsischen Kultusministeriums sowie des Niedersächsischen Ministeriums für Wissenschaft und Kultur Vertreterinnen und Vertreter aus Schule und Hochschule darüber ausgetauscht,

- über welche mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten Schulabsolventinnen und Schulabsolventen verfügen und
- welche Erwartungen Hochschule an die mathematischen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten von Studienanfängerinnen und Studienanfänger richtet.

Hierzu existieren in Niedersachsen auf regionaler Ebene Gesprächskreise Mathematik Schule-Hochschule, die auf landesweiter Ebene im vom Niedersächsischen Kultusministerium und Ministerium für Wissenschaft und Kultur geleiteten Institutionalisierten Gesprächskreis Mathematik Schule-Hochschule (IGeMa) gebündelt werden.

Das Basispapier Mathematik ist ein Ergebnis dieser Arbeit.

Es herrscht Einvernehmen über die Bedeutung einer soliden mathematischen Grundbildung und von mathematikbezogenen Denk- und Schlussweisen für die Allgemeinbildung, auch wenn Schule und Hochschule die Schnittstelle aus unterschiedlichen Perspektiven betrachten.

In der Hochschule ist Mathematik in vielen Fächern nicht nur ein Werkzeug zur zielgerichteten Behandlung komplexer Probleme in der Mathematik und in den Anwendungsfächern, sondern auch Sprache und Mittel zur Modellbildung und Abstraktion in fachspezifischen Zusammenhängen. Fachhochschulen und Universitäten haben spezifische Vorstellungen über die Inhalte der Grundlagenmathematik, die sich aus den unterschiedlichen Studienrichtungen ergeben.

Schule mit dem Ziel der Allgemeinen Hochschulreife vermittelt Schülerinnen und Schülern im Rahmen einer wissenschaftspropädeutisch ausgerichteten Bildung die allgemeine Studierfähigkeit. Alle Schulen sind auch der Allgemeinbildung verpflichtet. Der Fokus im Mathematikunterricht liegt auf der Entwicklung des mathematischen Denkens mit den Bereichen des logischen Argumentierens, der geometrischen Anschauung, des abstrakten analytischen Denkens und des Umgangs mit Zufallsereignissen. Kompetenzen wie Argumentieren, Problemlösen oder Modellieren haben in den letzten Jahren im Mathematikunterricht ein deutlich größeres Gewicht erhalten. Die Schule darf diejenigen Schülerinnen und Schüler nicht aus dem Auge verlieren, die keine mathematiknahen Berufe ergreifen wollen.

In diesem Spannungsfeld ist es wichtig, sowohl die Möglichkeiten von Schule wie auch die Erwartungen von Hochschule klar und präzise zu fassen. Eine mit Blick auf Schule und Hochschule konsentierte Orientierung ist Voraussetzung für eine adäquate Gestaltung des Übergangs und erleichtert, Studieninteressierte sowie Studienanfängerinnen und Studienanfänger effektiv zu unterstützen. Dies ist ein wesentliches Ziel des vorliegenden Papiers.

Die Arbeitsgruppe IGeMa hat die Aufgabe übernommen, die Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule hinsichtlich der Anforderungen an die mathematischen Inhalte mit Hilfe von illustrierenden Beispielaufgaben und einer Zusammenstellung von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten zu beschreiben. Diesbezüglich wird dargestellt, welche Kernaufgabe Schule leisten kann. Gleichzeitig werden von Hochschulseite Anforderungen formuliert, die einen erfolgreichen Beginn eines MINT-Studiums erwarten lassen. Darüber hinaus werden die unterschiedlichen Sichtweisen auf Mathematik von Schule und Hochschule am Beispiel der Analysis, der Geometrie und der Linearen Algebra sowie der Stochastik beschrieben. Beide Seiten akzeptieren die jeweiligen Möglichkeiten und Grenzen von Schule und Hochschule.

Ausdrücklich wird in diesem Basispapier Bezug auf die bestehenden Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der KMK v. 04.12.2003 – kurz MSA) und für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK v.18.10.2012 – kurz AHR) genommen. In die Arbeit eingeflossen ist zudem der „Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0 v. 27.10.2014) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern“ der cosh-Arbeitsgruppe. Durch die in dem vorliegenden Basispapier erfolgte Orientierung an den Kompetenzen der Bildungsstandards und die ergänzenden Aufgaben sowie die Beschreibung der Sichtweisen auf Mathematik und nicht zuletzt die Einteilung der Aufgaben in Kategorien (A-D) wird eine detailliertere und an Niedersachsen angepasste Charakterisierung der Schnittstelle erreicht. Das Basispapier ersetzt jedoch keine gesetzlichen Vorgaben, sondern dient der transparenteren Darstellung dieser Schnittstelle. Der entwickelte Aufgabenkatalog beinhaltet Aufgaben, die den Bildungsstandards entsprechen, sowie Aufgaben, die darüber hinausgehen, aber für einen erfolgreichen Studienbeginn als bedeutend angesehen werden. Auf diese Weise werden Lehrende an Schule und Hochschule, sowie Studieninteressierte über diese Diskrepanz informiert. Das Kategoriensystem und der Verweis auf die Bildungsstandards vereinfachen dabei die Orientierung.

Zu bedenken ist außerdem, dass bei den Studienanfängerinnen und Studienanfängern nicht grundsätzlich von der Allgemeinen Hochschulreife ausgegangen werden kann. Durch die Erhöhung der Durchlässigkeit des Bildungssystems sind eine Vielzahl an Hochschulzugangsberechtigungen entstanden (siehe u.a. www.studieren-in-niedersachsen.de). Diese Hochschulzugangsberechtigungen korrespondieren zum aktuellen Zeitpunkt nicht alle mit einheitlichen Bildungsstandards. Von besonderer Bedeutung sind daher basale Kompetenzen insbesondere auch aus dem Sekundarbereich I.

Ausblick:

Die in diesem Basispapier durch die Beschreibung der Schnittstelle aufgezeigten Herausforderungen sind Grundlage, um in der Folge gemeinsam weitere Maßnahmen zur Stärkung der MINT-Studienabschlüsse zu entwickeln. Das Basispapier Mathematik ist Bestandteil des Maßnahmenpakets der Vereinbarung zur Studienorientierung und Stärkung des Studienerfolgs in den MINT-Studienfächern zwischen Landeshochschulkonferenz Niedersachsen und Niedersächsischem Ministerium für Wissenschaft und Kultur vom 29.05.2017 sowie des Online-Informationsportals www.mint-in-niedersachsen.de.

2. Sichtweisen auf Mathematik von Schule und Hochschule

Das Basispapier wird geleitet von dem Anliegen, die Entwicklung des mathematischen Denkens bzw. der mathematischen Grundbildung der Schülerinnen und Schüler von der Unterstufe bis in die mittleren Semester des Studiums als einen möglichst schlüssig ablaufenden Prozess zu gestalten. Insbesondere die Schnittstelle zwischen Schule und den verschiedenen Hochschulen erfordert eine gemeinsame Reflexion der unterschiedlichen mathematischen Kulturen und der daraus resultierenden Sichtweisen. Die Kenntnis zentraler Sichtweisen ist dabei eine Grundvoraussetzung:

Die Schule hat einen allgemeinbildenden Auftrag, der sich sowohl in der Inhaltsauswahl der Bildungsstandards und Kerncurricula als auch bei deren Vermittlung widerspiegelt. Begriffe werden wesentlich durch anschauliche Vorstellungen getragen; eine axiomatische Sichtweise auf Definitionen und Sätze findet nicht statt, wohl aber bereitet die Betrachtung von Beziehungen zwischen mathematischen Objekten und deren Verwendung als Ordnungsmerkmal den Weg für einen späteren systematischen Zugang vor. Auch Begründungen stützen sich meist auf Anschauungen; formale Beweise werden in ihrer Logik, ihrer Formalität und ihrer Funktion beim mathematischen Arbeiten in Ansätzen thematisiert.

Die Perspektiven der Hochschulen auf Mathematik lassen sich grundlegend untergliedern in eine anwendungsorientierte und in eine fachwissenschaftlich orientierte Sichtweise. Beiden Sichtweisen ist gemein, dass mathematisches Arbeiten wesentlich auf Kenntnissen und Kompetenzen des Sekundarbereichs I und oftmals auf solchen der Oberstufe basiert.

In der anwendungsorientierten Sichtweise ist Mathematik vorrangig ein Werkzeug, mit dem jedoch anders als in der Schule keine alltäglichen sondern fachspezifische Fragestellungen bearbeitet werden; Mathematik ist aber auch eine Sprache zum Formalisieren von Sachzusammenhängen. Allgemein-mathematische Betrachtungen beziehen sich auf Reichweite, Durchführung, Gültigkeit und Effizienz der eingesetzten Verfahren; die innermathematische Fachsystematik (axiomatisches Arbeiten, Existenz- und Eindeutigkeitsbeweise, etc.) wird je nach Bedürfnissen des Anwendungsfaches in unterschiedlichen Begründungs- und Anwendungszusammenhängen verwendet. Je nach Studiengang und Hochschule werden dabei Inhalte der Schule wiederholt oder als bekannt vorausgesetzt; solide als Routinen verfügbare Rechenfertigkeiten (z.B. Bruch- und Potenzrechnung, Termumformungen) werden erwartet und sollten in der Schule nachhaltig erworben werden.

Die fachwissenschaftlich orientierte Sichtweise fokussiert auf das innermathematische Arbeiten. Definitionen, Sätze und Beweise erhalten ihren Stellenwert im axiomatischen Aufbau. Beispiele haben illustrierenden Charakter oder reihen sich als Gegenbeispiele in das axiomatische Arbeiten ein. Die Gültigkeit jeder Aussage, sowie die Möglichkeiten und Grenzen der Verwendung jedes Verfahrens müssen bewiesen werden. Im Zentrum der Begriffsbildung stehen Gültigkeit und Wohldefiniertheit von Begriffen und Verfahren sowie deren Beziehungen untereinander. Es ist nicht zentral, welche Ergebnisse Algorithmen liefern, sondern weshalb sie funktionieren und wie sie zur Erkenntniserweiterung in anderen mathematischen Bereichen beitragen.

2.1 Analysis

Die schulische Behandlung der Analysis beruht zunächst ganz wesentlich auf Anschaulichkeit. So wird in der Schule vor allem mittels Graphen argumentiert, während in der Hochschulmathematik je nach Schwerpunkt des Studienfaches das formale Konzept der Funktion stärker in den Mittelpunkt rückt und Graphen oftmals kaum mehr als der Illustration dienen.

In der Schule werden ausschließlich Polynom-, Exponential- und einfache trigonometrische Funktionen behandelt, jedoch unter anderem keine gebrochen-rationalen Funktionen, keine Logarithmusfunktionen (die ln-Funktion ist lediglich als Stammfunktion von $f(x)=x^{-1}$ eingeführt). In der schulspezifischen Sichtweise werden Begriffe und Vorstellungen ausschließlich für reelle Funktionen in einer Veränderlichen motiviert, definiert und entwickelt. Das Arbeiten mit zentralen Begriffen orientiert sich im Allgemeinen an graphischen Darstellungen. So werden etwa Stetigkeit und Differenzierbarkeit nur anschaulich an abschnittsweise definierten Funktionen illustriert. Mit Blick auf die Anschlussfähigkeit gehört ebenfalls dazu, die Grenzen der durch die typischen Schulfunktionen beförderten Anschauung durch Negativbeispiele aufzuzeigen (z.B. Nichtnotwendigkeit des hinreichenden Vorzeichenwechselkriteriums für Extremstellen, obwohl der Nachweis außerhalb der Schulmathematik liegt) und so die Begriffsbildung an der Hochschule vorzubereiten. Ein Anspruch der schulischen Analysis besteht darin, einen Grenzwertbegriff propädeutisch so zu entwickeln, dass das spezielle Wesen der Analysis, die gedankliche Auseinandersetzung mit dem Unendlichen, erfahrbar wird.

Die im Rahmen der Analysis in Anwendungsdisziplinen der Hochschulen thematisierten Begriffe und Funktionen hängen in Umfang und Tiefe der Behandlung von den disziplinspezifischen Fachinhalten ab. Die in der schulspezifischen Sichtweise entwickelten Vorstellungen müssen in Abgrenzung zu diesen weiterentwickelt werden, etwa bei der Fassung des Grenzwertbegriffs oder dem Übergang von der ein- zur mehrdimensionalen Analysis. Aus der Schule bekannte Notationen müssen vorstellungsgebunden weitergeführt und motiviert werden (z.B. f(x) zu f(x,y), Integral von f(x)dx zu Integral von f(x,y)dxdy). Die Anwendung mathematischer Verfahren in den fachspezifischen Zusammenhängen erfordert oftmals eine Bewertung von Mess- und Approximationsfehlern.

In der fachwissenschaftlichen Sichtweise wird vorrangig auf die strenge Grundlegung aller verwendeten Begriffe Wert gelegt. Beispielweise werden Ableitungsregeln und konkrete Ableitungen nicht mit dem Ziel bestimmt, rechnerische Ergebnisse zu erhalten, sondern zur Erkundung, wie weit der Begriff der Ableitung in mathematisch unterschiedlichen Situationen trägt. Vorstellungen aus der schulischen Mathematik tragen vielfach nur noch eingeschränkt und müssen deutlich weiterentwickelt werden. Ableitungen und Integrale werden auf beliebige Dimensionen erweitert, Aspekte der Rekonstruktion und Änderung in Sachzusammenhängen treten in den Hintergrund, die lokale Linearisierung wird zur zentralen Vorstellung der Ableitungen. Der in der Schule propädeutisch behandelte Begriff des Grenzwerts erhält ein exaktes Fundament.

2.2 Geometrie und Lineare Algebra

In Schule und Hochschule ist im Bereich Geometrie und Lineare Algebra der Entwicklungsprozess des mathematischen Denkens zentral: Beginnend mit der Behandlung von geometrischen Konstruktionen und Trigonometrie im Sekundarbereich I wird auf der Basis von anschaulichen Problemen im Zwei- und Dreidimensionalen das klare Beschreiben von mathematischen Zusammenhängen erarbeitet und der Fokus auf das Begründen gelegt. Die Koordinatisierung führt in der analytischen Geometrie und der Linearen Algebra zu neuen algebraischen Sichtweisen auf geometrische Sachverhalte. Das Vorgehen bleibt in der Schule stets noch innerhalb des anschaulich erfassbaren Raumes IR3. In der anwendungsorientierten Sicht der Hochschule wird der Vektor-Begriff disziplinspezifisch erweitert, und in der fachwissenschaftlichen Sicht wird der formale Begriff des Vektorraums zur Basis.

Die Schule bleibt auch im Bereich linearer Gleichungssysteme auf einer anschaulich praktischen Ebene; der Gauß-Algorithmus sowie abstrakte Konzepte wie lineare Unabhängigkeit werden nicht formal eingeführt. In Niedersachsen werden Matrizen außer im geometrischen Zusammenhang nicht behandelt. In Anwendungsdisziplinen der Hochschule ist der souveräne Umgang mit Linearen Gleichungssystemen und dem Matrizenkalkül bereits sehr früh zur Beschreibung komplexer Sachverhalte unabdingbar, die zugrundeliegenden Begriffe und Techniken werden in den ersten Semestern kontinuierlich bedarfsorientiert weiterentwickelt. In der Fachwissenschaft stellt die Lineare Algebra – nicht zuletzt, da typische mathematische Arbeitsmethoden, Schlussweisen und Beweisverfahren sowie eine typische Haltung gegenüber mathematischem Arbeiten hier gut exemplarisch eingeführt werden können – den Einstieg in die Welt der Algebra dar.

2.3 Stochastik

Die Stochastik umfasst die beschreibende Statistik, die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die schließende Statistik.

In der beschreibenden Statistik erlernen die Schülerinnen und Schüler den Umgang mit arithmetischem Mittel, Median und empirischer Standardabweichung sowie deren Interpretation. Ein darauf aufbauend rationaler Umgang mit Messdaten bildet einen wesentlichen Bestandteil vieler Studiengänge, nicht nur in praxisorientierten Ausbildungskomponenten (Labore, Praktika, Anfängerprojekte etc.) naturwissenschaftlich-technischer Fächer. Die Schülerinnen und Schüler kennen sich nicht darin aus, statistische Trends und Zusammenhänge zweier Merkmale mit Hilfe von Funktionen zu beschreiben.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschränken sich die kombinatorischen Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler im Wesentlichen auf den Binomialkoeffizienten. Der abstrakte Begriff der Zufallsgröße als Funktion und das Konzept Unabhängigkeit von Zufallsgrößen wird in der Schule nicht behandelt, wohl aber die Unabhängigkeit von Ereignissen. Der Begriff der Unabhängigkeit ist auf den Fall von zwei Ereignissen beschränkt. An Verteilungen sind den Schülerinnen und Schülern nur die Gleich- und die Binomialverteilung geläufig, im Leistungskurs auch die Normalverteilung. Im Hochschulbereich werden Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung disziplinspezifisch in der Regel in höheren Semestern behandelt, insbesondere auch in der Fachwissenschaft.

In der schließenden Statistik sind die Schülerinnen und Schüler mit Konfidenzintervallen bzgl. des Anteils bei binomialverteilten Zufallsgrößen vertraut (im Grundkurs nur über Simulation, im Leistungskurs durch die Normalverteilungsapproximation). Hypothesentests werden in Niedersachsen nicht unterrichtet. In vielen anwendungsorientierten Studiengängen sind diese jedoch zentral für das wissenschaftliche Arbeiten und werden frühzeitig benötigt.

↑ zurück zum Inhalt

3. Illustrierende Beispielaufgaben

Die folgenden Beispielaufgaben fokussieren auf die Schnittstelle Schule – Hochschule. Sie illustrieren die Kompetenzen, welche von Schulabsolventinnen und Schulabsolventen gemäß Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (AHR) bzw. für den mittleren Schulabschluss (MSA) zu erwarten sind. Darüber hinaus veranschaulichen sie die Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die Studienanfängerinnen und Studienanfänger eines MINT-Studiengangs mitbringen sollten, um das Studium erfolgreich zu beginnen.

Die Aufgaben dienen Lehrenden in Schule und Hochschule sowie Studieninteressierten somit zur Orientierung. Die Beispielaufgaben sollen Lehrenden eine Grundlage für voraussetzbare fachliche Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten der Studienanfängerinnen und Studienanfänger liefern. Zudem sollen sie mindestens in Teilen veranschaulichen, welche Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten gemäß Allgemeinbildungsauftrag von schulischem Mathematikunterricht über das unmittelbar für die Aufnahme eines Studiums relevante Spektrum hinausgehend zu vermitteln sind.

Zur Erläuterung der erforderlichen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten wird (wenn möglich) in jeder Aufgabe ein Bezug zu den in den jeweiligen Bildungsstandards AHR bzw. MSA formulierten Kompetenzen hergestellt (siehe Teil 4 des Basispapiers Mathematik).

Die Kompetenzen des MSA werden an allen Hochschulen in allen Studiengängen mit Mathematikbezug vorausgesetzt. Ein sicheres Beherrschen besonders der grundlegenden Rechentechniken sowie die Fähigkeit zum Erfassen logischer Zusammenhänge wird erwartet. Darüber hinausgehende Kompetenzen der AHR werden je nach Anforderungen der betreffenden Hochschule und des betreffenden Studiengangs (nochmal) in komprimierter Form und aus der Perspektive der Hochschule aufgegriffen. An den Fachhochschulen werden mit Blick auf die heterogeneren Zugangsvoraussetzungen Kompetenzen der AHR typischerweise ausführlicher thematisiert als an Universitäten.

Hinweise zur Zusammenstellung der Beispielaufgaben:

Da von Hochschulseite insbesondere der Umgang mit technischen und formalen Elementen eingefordert wird, sind Aufgaben, die diesbezügliche Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erfordern, überproportional vertreten. Im Unterricht sollen sie aus Gründen des Allgemeinbildungsauftrags von Schule sowie der curricularen Vorgaben nicht in gleicher Weise dominieren. Der Katalog ist somit kein repräsentativer Querschnitt schulischen Mathematikunterrichts.

Mit dem „Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Hochschulen Baden-Württembergs für ein Studium von WiMINT-Fächern“ der Arbeitsgruppe cosh liegt ein mittlerweile – vor allem bei Hochschulen geschätzter – weitverbreiteter Katalog vor. Aus diesem werden Aufgaben (mit entsprechender Kennzeichnung) direkt übernommen, einige modifiziert, einige weggelassen und andere ergänzt.

Um die Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule deutlich zu markieren, wird auch auf Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten rekurriert, die von Hochschule in der Regel erwartet, aber von Schule höchstens angebahnt, teilweise auch gar nicht vorbereitet werden. Andererseits illustrieren die Beispielaufgaben auch über die Inhalte des cosh-Katalogs hinaus bildungsrelevante Aspekte, welche durch die in Schule zu fördernden allgemeinbildenden inhalts- und prozessorientierten Kompetenzen abgebildet sind, die in der Regel nicht unmittelbar von Hochschule gefordert werden. Zur Vereinfachung der Orientierung wurde folgendes Kategoriensystem entwickelt:

Kategorisierung der Aufgaben

A Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten werden von Hochschule in der Regel erwartet und in Schule erworben.

B Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten werden von Hochschule in der Regel erwartet und in Schule auf dem Niveau grundlegender Ideen und Anschauungen erworben.

C Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten werden von Hochschule in der Regel erwartet, die entsprechenden Inhalte sind jedoch nicht Gegenstand schulischer Bildung.

D Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten werden von Hochschule in der Regel nicht erwartet, in Schule jedoch erworben.

Anmerkungen zu den Aufgaben

1. Es wird (wenn möglich) jeweils der Bezug der Aufgaben zu den Leitideen der Bildungsstandards, zum cosh-Katalog sowie zu den Aufgabenkategorien (A–D) angegeben.
2. Prozessorientierte Kompetenzen werden dort gesondert ausgewiesen, wo sie im Zentrum einer Aufgabe stehen.
3. Wo es sinnvoll erschien, wurden erläuternde Kommentare eingefügt.
4. Die Aufgaben sind für die Nutzung ohne Hilfsmittel konzipiert. Für die Schule bedeutet dies, dass auch Formelsammlungen nicht genutzt werden (vgl. hilfsmittelfreier Teil in den zentralen Prüfungen). Der Gebrauch von digitalen Mathematikwerkzeugen ist in gekennzeichneten Fällen vorgesehen.

Hinweise zur Systematik der Beispielaufgaben

Alle Beispielaufgaben sind nach dem hier exemplarisch aufgeführten Muster dargestellt.

Nummer der Aufgabe

Aufgabenkategorie (A-D)

Bezug zum Mindestanforderungskatalog Mathematik (Version 2.0) der Arbeitsgruppe cosh (2014).

Bezug zu den Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (AHR)

Bezug zu den Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (MSA)

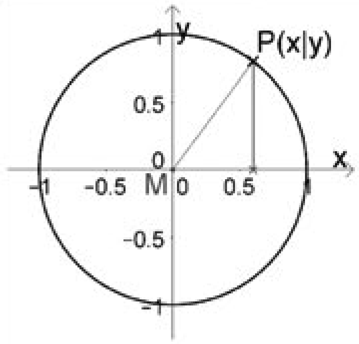
Aufgabe 3.2.16	nach cosh 61(a)(b)	MSA L2.6; L4.10	AHR L3.1; L4.1	A

Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0\,|\,0)$.

a) Zeichnen Sie einen Punkt P auf dem Einheitskreis ein, so dass für den zu P gehörenden Winkel α zur x-Achse $\sin(\alpha) = 0{,}6$ ist.

b) Begründen Sie, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ einen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft gibt.

c) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$.



d) Begründen Sie mithilfe des Einheitskreises, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ nur einen Punkt P gibt, für den gilt: $\cos(\alpha) = 0{,}8$.

e) Erläutern Sie, dass für alle Winkel $0° < \alpha < 90°$ gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.

Kommentar:
Die hier thematisierten Kompetenzen sind grundlegend für das Verständnis des Sinus und des Cosinus.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Verweise auf prozessbezogene Kompetenzen

Kommentare zu den Aufgaben

3.1 Elementare Algebra

Aufgabe 3.1.1		MSA L1.1		A

Ordnen Sie die angegebenen Zahlen der Größe nach, beginnend mit der kleinsten:

$0;1;2^3;2^{-3};-2^2;(-2)^2;2^{\frac{1}{2}}$

Aufgabe 3.1.2		MSA L1.1		A

Fassen Sie die Terme zusammen:

a) $\left(-\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{1}{4}\right)$

b) $\left(-\frac{7}{8}\right)-\left(+\frac{3}{4}\right)$

c) $\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)$

d) $\left(+\frac{2}{5}\right):\left(-\frac{3}{4}\right)$

Aufgabe 3.1.3		MSA L1.8		A

Ordnen Sie der Größe nach: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $\sqrt{2}$; $\log_{10} 500$; $\sin(200°)$

Aufgabe 3.1.4	nach cosh 13	MSA L1.1; L1.2		A

Wenn man die Zahlen $a=\left(10^{10}\right)^{10}$ und $b=10^{\left(10^{10}\right)}$ ausschreibt, beginnen sie mit einer 1, danach kommen viele Nullen.
Geben Sie an, wie viele Stellen die Zahlen a bzw. b haben.

Aufgabe 3.1.5		MSA L1.1; L1.2		A

Vergleichen Sie $\left(10^2\right)^3$ und $\left(10^3\right)^2$.

Aufgabe 3.1.6	cosh 20	MSA L1.1; L1.9		A

a) Begründen Sie, dass $\left(\frac{99}{41}\right)^2$ zwischen 4 und 9 liegt.

b) Zwischen welchen aufeinander folgenden ganzen Zahlen liegt $\sqrt{150}$?

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.1.7	cosh 21	MSA L1.1; L1.2		A

Stellen Sie als eine Dezimalzahl dar:

a) $0{,}005 \cdot 100$

b) $\dfrac{78653}{10^4}$

Aufgabe 3.1.8		MSA L2.2		A

a) Wieviel Liter sind $3\,m^3$?
b) Geben Sie 12 g in t an.
c) Wie viel Kubikzentimeter enthält ein Kubikmeter?
d) Wie viele m^2 sind $1{,}5\,dm^2$?
e) Wie viele Sekunden sind 2 Stunden?

Aufgabe 3.1.9		MSA a) L1.1; b) L4.7		A

Wahr oder falsch. Begründen Sie jeweils.

a) $-x < x$

b) Lineare Gleichungen mit einer Variablen haben immer genau eine Lösung.

Kommentar:
Ziel der Aufgabe ist das Argumentieren. Beide Aussagen sind dabei bewusst vage als Diskussionsanlass gestaltet. Es wird $x \in \mathbb{R}$ unterstellt.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.1.10		MSA L4.6	AHR L4.1	A

Erklären Sie die Aussage von $x \cdot y = 1$ mit Worten.

Kommentar:
Eine Thematisierung der Grundmengen wird nicht systematisch verfolgt und wird daher auf der Schule meist weggelassen. Es wird $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{R}$ unterstellt.

Aufgabe 3.1.11		MSA L4.6	AHR L1.1, L4.1	A

Geben Sie jeweils die Lösungen der folgenden Gleichungen an:

$x^2 + 2 \cdot x = 0 \qquad x^2 + 2 \cdot x - 8 = 0 \qquad x^2 + 2 \cdot x + 5 = 0$

Kommentar:
Der Aufgabeninhalt wurde bewusst einfach gewählt, greift aber eine bekannte Schwierigkeit auf.
Eine Thematisierung der Grundmengen wird nicht systematisch verfolgt und wird daher auf der Schule meist weggelassen. Es wird $x \in \mathbb{R}$ unterstellt.

Aufgabe 3.1.12	nach cosh 39	MSA L4.7		A

Begründen Sie, welche der Aussagen in Bezug auf die folgende Gleichung richtig bzw. falsch sind: $(x-2)\cdot(x-\sqrt{2})\cdot(x^2-9)=0$.

a) $x=1$ und $x=2$ sind Lösungen.
b) $x=2$ und $x=3$ sind Lösungen.
c) $x=1{,}4142$ und $x=2$ sind Lösungen.
d) Es gibt genau vier Lösungen.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.1.13	cosh 40			C

Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $\sqrt{8-2\cdot x}=1+\sqrt{5-x}$?

Kommentar:
Gleichungen dieses Typs sind nicht Bestandteil der Bildungsstandards.
Lediglich einfache Wurzelfunktionen und einfache Wurzelgleichungen wie $\sqrt{8-2\cdot x}=1$ wären der Kategorie A zuzuordnen.

Aufgabe 3.1.14	cosh 41			C

Für welche $x\in\mathbb{R}$ sind die folgenden Gleichungen erfüllt?

a) $2\cdot e^{-2\cdot x}-5\cdot e^{-x}=0$
b) $x^4-13\cdot x^2+36=0$
c) $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{x^2-9}$

Kommentar:
Exponentialgleichungen dieser Komplexität, biquadratische Gleichungen und Bruchgleichungen dieser Komplexität sind nicht Bestandteil der Bildungsstandards.
Lediglich einfache Verhältnisgleichungen wie $\frac{2}{x}=\frac{7}{x+1}$ wären der Kategorie A zuzuordnen.

Aufgabe 3.1.15	nach cosh 90	MSA L4.5, L4.6	AHR L1.1, L1.2	A

Gegeben ist ein Lineares Gleichungssystem $\left|\begin{array}{rcrcr} 2\cdot x & + & y & = & 1 \\ x & - & y & = & 3 \end{array}\right|$.
Zeichnen Sie die zugehörigen Geraden und geben Sie die exakte Lösung in Form einer Lösungsmenge an.

Kommentar:
Lineare Gleichungssysteme werden in der Schule stets über den reellen Zahlen betrachtet.

Aufgabe 3.1.16		MSA L4.6; L4.7; L4.8	AHR L4.1	a) A, b) A, c) B, d) C

Stellen Sie in einem Koordinatensystem die folgenden Gleichungen graphisch dar:

a) $x - y = 1$
b) $y - x = 1$

Markieren Sie in dem Koordinatensystem den Bereich, der durch die folgenden Ungleichungen gegeben ist:

c) $x - y < 1$
d) $|x - y| < 1$

Kommentar:
Der formale Umgang mit Ungleichungen sowie mit Beträgen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

Aufgabe 3.1.17	nach cosh 88	MSA L4.6	AHR L1.1, L1.2	A

Lösen Sie folgendes LGS:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2 \cdot x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 3 \end{array} \right|$$

Aufgabe 3.1.18		MSA L4.7	AHR L4.1	A

Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + b \cdot x + 4 = 0$.
Untersuchen Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von b.

Kommentar:
Eine Thematisierung der Grundmengen wird in der Schule nicht systematisch verfolgt und daher meist weggelassen. Es wird, wie in der Schule üblich, $x \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ unterstellt.

Aufgabe 3.1.19	cosh 42			C

Lösen Sie die folgenden Ausdrücke nach x auf.

a) $\sqrt{x} \cdot u = \frac{v}{x^2}$

b) $x^{\frac{3}{4}} \cdot t^2 = x^{-4} \cdot y$

Kommentar:
Gleichungen dieses Typs sind nicht Bestandteil der Bildungsstandards.
Wenn die Parameter durch Zahlen ersetzt würden, könnten die Aufgaben der Kategorie B zugeordnet werden.

Aufgabe 3.1.20	cosh 43			C

Für welche x gilt $3 \cdot x - 7 > 2 + 5 \cdot x$?

Kommentar:
Der formale Umgang mit Ungleichungen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

Aufgabe 3.1.21	cosh 45			C

Lösen Sie
a) $|x - 3| < 2$
b) $|2 \cdot x - 3| > 5$

Kommentar:
Der formale Umgang mit Ungleichungen und Beträgen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

Aufgabe 3.1.22	cosh 47			C

Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist
a) $\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{1}{9}$?
b) $\frac{1}{1 - x} > 3$?

Kommentar:
Der formale Umgang mit Ungleichungen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

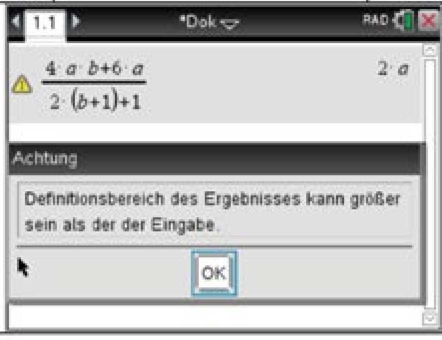
Aufgabe 3.1.23	nach cosh 22 (a) und cosh 23	MSA L1.4		A

Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie so weit wie möglich zusammen:
a) $-\left(-\left(b + c - \left(5 - (+3)\right)\right)\right)$
b) $3 \cdot a \cdot b - \left(b \cdot (a - 2) + 4 \cdot b\right)$

Aufgabe 3.1.24	nach cosh 22(b)	MSA L1.1; L1.4; L1.9		A

In dem Bild rechts ist dargestellt, wie mithilfe eines Rechners ein Term vereinfacht wurde.

a) Erklären Sie die Umformungsschritte des Rechners.
b) Erläutern Sie den Warnhinweis des Rechners.



Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.1.25	cosh 24	MSA L1.4		B

Multiplizieren Sie $\left(\frac{b}{3\cdot x}-\frac{x^2}{b^3}\right)^2$ mithilfe der binomischen Formeln aus.

Kommentar:
Der Umgang mit binomischen Formeln wird auf der Schule angelegt, aber nicht in der hier intendierten Tiefe verfolgt.
Die hier geforderten Kompetenzen werden typischerweise in der Studieneingangsphase benötigt.

Aufgabe 3.1.26		MSA L1.4		A

Multiplizieren Sie aus und fassen Sie soweit wie möglich zusammen:

a) $(2\cdot n-m)^2+(n+m)^2$

b) $(3\cdot p-4\cdot q)\cdot(3\cdot p+4\cdot q)-(9\cdot p^2-6\cdot q^2)$

c) $(4\cdot a^3+5\cdot b^2)\cdot(3\cdot a^2-b^4)$

Aufgabe 3.1.27	cosh 25			C

Vereinfachen Sie den Ausdruck $\frac{4-t^2}{4-4\cdot t+t^2}$.

Kommentar:
Bruchterme sind nicht Bestandteil der Bildungsstandards.
Mit einem Hinweis „Beachten Sie die binomischen Formeln“ könnte die Aufgabe der Kategorie B und MSA L1.4 zugeordnet werden.

Aufgabe 3.1.28	cosh 28 (b)	MSA L1.4, L4.6	AHR L4.1	a), b) A, c) B

a) Lösen Sie die Gleichung $b = 2 \cdot a^2 - 3$ nach a auf.

b) Lösen Sie die Gleichung nach jeder Variablen auf: $a \cdot x - 2 \cdot x = 12$

c) Bringen Sie $\frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{c}{x-3}$ auf den Hauptnenner.

Kommentar:
Anmerkung zu b): Für Schulabgänger ist leichter verständlich „Lösen Sie die Gleichung einmal nach x und einmal nach a auf.“
Die Kompetenzen zur Lösung von (c) werden im Sekundarbereich I angelegt. Es geht hier nicht allein um die Bruchrechnung, sondern um die Komplexität der Gesamtanforderung (Techniken zu übertragen in eine Situation mit mehreren Variablen und Parametern).

Aufgabe 3.1.29	cosh 29	MSA L1.4		B

Fassen Sie den Ausdruck $\frac{1}{x+1} + x - 1$ zu einem Bruch zusammen.

Kommentar:
Die Kompetenzen zur Lösung solcher Aufgaben werden in der Sekundarstufe I auf der Schule angelegt.

Aufgabe 3.1.30	cosh 30	MSA L1.4		B

Vereinfachen Sie $\left(\frac{a^2 \cdot b}{c \cdot d^2}\right)^3 : \left(\frac{a \cdot b^2}{c^2 \cdot d^2}\right)^4$.

Kommentar:
Die Kompetenzen zur Lösung solcher Aufgaben werden im Sekundarbereich I angelegt. Es geht hier nicht allein um die Bruchrechnung, sondern um die Komplexität der Gesamtanforderung (Techniken zu übertragen in eine Situation mit mehreren Variablen und Parametern).

Aufgabe 3.1.31		MSA L1.4		B

Fassen Sie die Terme zusammen:

a) $\left(-\frac{3}{a}\right)+\left(+\frac{1}{2\cdot a}\right)$ b) $\left(-\frac{7}{a}\right)-\left(+\frac{3}{a+1}\right)$

c) $\left(+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(-\frac{2}{a^2}\right)$ d) $\left(\frac{a}{b^2}\right):\left(\frac{b}{a^2}\right)$

Kommentar:
Bruchterme und Parameter sind nicht Gegenstand der Bildungsstandards.
Der erfolgreiche Umgang mit Hauptnennern und Doppelbrüchen ist für einen erfolgreichen MINT-Studieneinstieg von Bedeutung.

Aufgabe 3.1.32	cosh 35	MSA L1.4		A

Fassen Sie den Ausdruck $x^2 \cdot x^4 + \frac{x^8}{x^2} + (x^2)^3 + x^6$ zusammen.

Aufgabe 3.1.33	cosh 36	MSA L1.4		B

Vereinfachen Sie $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$.

Kommentar:
Der Umgang mit solchen Wurzeltermen ist nicht sicher verfügbar. Er steht nicht im Fokus der Schule, wird entsprechend nicht geübt und kommt in der Oberstufe nicht wieder vor.

Aufgabe 3.1.34	cosh 9			B

Erläutern Sie den Unterschied zwischen der Menge $\{2;5\}$ und dem Intervall $[2;5]$.
Entscheiden Sie für $x=2$, $x=4$ und $x=6$, ob x in $\{2;5\}$ bzw. $[2;5]$ liegt.

Kommentar:
Schule sollte den Begriff einer Zahlenmenge und den Umgang damit anlegen (im Gegensatz zu „verankern“). Die formalen Sprechweisen müssen noch nicht vollständig verankert sein. Schüler können mit den Begriffen inhaltlich umgehen, aber nicht in dieser formalen Schreibweise.

Aufgabe 3.1.35	cosh 11			C

Was ist an folgender Aussage falsch?
$x^2-4 \Rightarrow (x+2)\cdot(x-2)$

Kommentar:
Dieser strenge Umgang mit Schreibweisen wird in den Bildungsstandards nicht gefordert.

Aufgabe 3.1.36		MSA L4.6, L4.7		B

Welche der folgenden Aussagen gelten?

a) Aus $x^2-4=0$ folgt $(x+2)\cdot(x-2)=0$.

b) $x^2-4=0$ gilt genau dann, wenn $(x+2)\cdot(x-2)=0$.

c) Aus $x^2-4=0$ folgt $x+2=0$.

d) Aus $x+2=0$ folgt $x^2-4=0$.

Kommentar:
Der Unterschied zwischen Implikation und Äquivalenz wird in der Schule angelegt, aber nicht formal verfolgt. Implikation und Äquivalenz können nur an Aussagen untersucht werden.

Aufgabe 3.1.37		MSA L1.1		A

Begründen Sie, dass folgende Behauptung falsch ist:
Wenn eine ganze Zahl durch zwei teilbar ist, dann ist sie auch durch vier teilbar.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.1.38	cosh 38		AHR L1.1	B

Lösen Sie die Gleichung $y=\frac{x+1}{x-1}$ nach x auf.

Kommentar:
Auf der Ebene der Termumformungen spielen Terme der vorgelegten Art im Schulkontext keine Rolle.
Der Begriff der Umkehrfunktion, der nicht Gegenstand der Untersuchungen in der Schule ist, schwingt hier bereits implizit mit.
Die Aufgabe thematisiert jedoch bewusst nur die dafür notwendigen Termumformungen und nicht diesen Begriff selbst.

Aufgabe 3.1.39	cosh 87			C

Überprüfen Sie, ob sich die folgenden Kreise schneiden. Bestimmen Sie hierzu die Mittelpunkte und die Radien. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse mittels einer Zeichnung.

$k_1:(x+6)^2+(y+4)^2=64$

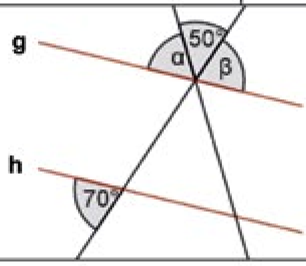
$k_2:x^2+2\cdot x+y^2-16\cdot y+40=0$

Kommentar:
Implizite nichtlineare Gleichungen werden in den Bildungsstandards nicht gefordert.

3.2 Elementare Geometrie/Trigonometrie

Aufgabe 3.2.1		MSA L3.1		A

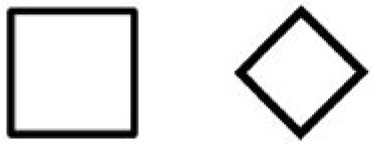
Die Geraden g und h sind parallel.
Berechnen Sie die eingezeichneten Winkel.
Geben Sie Begründungen an.



Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.2.2	nach cosh 49	MSA L3.6		A

a) Begründen Sie, dass beide Figuren Quadrate und Rauten (Rhomben) sind.
b) Zeichnen Sie eine Raute, die kein Quadrat ist.



Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.2.3	cosh 48	MSA L3.6		A

Von einem Viereck ist bekannt, dass es sowohl eine Raute (Rhombus) als auch ein Rechteck ist.
Begründen Sie, welche der folgenden Aussagen richtig sind:
a) Das Viereck ist ein Parallelogramm.
b) Das Viereck ist ein Drachen.
c) Das Viereck ist ein Quadrat.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.2.4		MSA L2.4; L3.6		A

Die Seitenlängen eines Rechtecks verhalten sich wie 5 : 9.
Wie lang ist die größere Seite, wenn die kleinere 12 cm lang ist?

Aufgabe 3.2.5	cosh 34	MSA L2.4; L3.7		A

Wie verändert sich der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn eine der Katheten um 20 % verkürzt und die andere um 20 % verlängert wird?

Aufgabe 3.2.6	cosh 27	MSA L2.4		A

Eine Kamera hat eine Auflösung von 6 Megapixel (der Einfachheit halber 6 Millionen Bildpunkte) und produziert Bilder im Kleinbildformat, d. h. mit dem Seitenverhältnis 3 : 2. Welchen Flächeninhalt nimmt ein quadratisches Pixel auf einem Ausdruck im Format (60 cm) × (40 cm) ein?

Aufgabe 3.2.7	cosh 50	MSA L3.6; L3.8		A

Zwei Dreiecke heißen ähnlich, wenn sie die gleichen Innenwinkel besitzen.

In einem spitzwinkligen Dreieck ABC seien nun D der Höhenfußpunkt von C, E der Höhenfußpunkt von B und S der Schnittpunkt der beiden Höhen DC und EB.

a) Skizzieren Sie den dargestellten Sachverhalt.

b) Begründen Sie, dass die Dreiecke SCE, ADC, BEA und SDB ähnlich sind.

Kommentar:
Keine Standardaufgabe, obwohl die einzelnen Elemente Standard sind.
Höhenfußpunkt als Begriff eher unbekannt.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

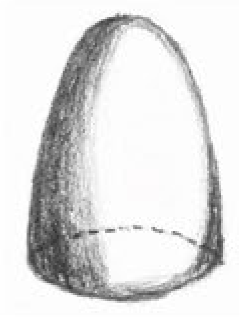
Aufgabe 3.2.8	cosh 33	MSA L3.6		A

Ein Kreissektor füllt 30 % der Fläche eines Kreises aus.
Welchem Mittelpunktswinkel entspricht das?

Aufgabe 3.2.9		MSA L2.3; L2.5; L3.10		A

Ein Körper ist 9 m hoch und hat einen Basisdurchmesser von 6 m.
Der Körper ist dabei drehsymmetrisch.

Schätzen Sie das Volumen des Körpers nach oben und unten ab, indem Sie sein Volumen mit denen entsprechend „einfacherer“ Körper vergleichen.



Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren, Modellieren

Aufgabe 3.2.10	nach cosh 52	MSA L2.5		A

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt und das Volumen eines Zylinders mit dem Durchmesser 4 cm und der Höhe 8 cm.

Aufgabe 3.2.11	cosh 53	MSA L2.5; L3.6		A

Gegeben sei eine quadratische Pyramide mit dem Volumen $200\,\text{cm}^3$ und der Höhe 6 cm. Berechnen Sie die Länge der Grundseite und den Inhalt der Grundfläche.

Aufgabe 3.2.12	nach cosh 54	MSA L3.3; L3.5	AHR L2.9	A

Ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 10 cm wird um eine der Symmetrieachsen gedreht.
Geben Sie an, welcher Körper dabei entsteht.
Berechnen Sie das Volumen des erzeugten Drehkörpers.

Aufgabe 3.2.13	nach cosh 55(c)	MSA L2.2	AHR L4.1	A

Ergänzen Sie die folgende Tabelle

Bogenmaß	$2\cdot\pi$		$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$			
Gradmaß		180°			270°	135°	18°

Aufgabe 3.2.14	nach cosh 56	MSA L1.5; L2.6; L4.10	AHR L4.1	a) A; b) B

a) Geben Sie an, welche Werte nicht plausibel sind und begründen Sie ihre Antwort.

$\cos(\pi)=0{,}998$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=0{,}027$, $\sin(270°)=-1$, $\sin(30°)=-0{,}988$, $\sin(20°)=1{,}3$

b) Begründen Sie, dass $\cos(45°)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.2.15	nach cosh 60	MSA L2.6	AHR L4.1	A

Der Sinus von 15° ist ungefähr 0,26.
Geben Sie daraus näherungsweise die Werte $\sin(165°)$, $\sin(-15°)$, $\cos(75°)$ und $\cos(105°)$ an.

Kommentar:
Während an der Schule der Cosinus weitgehend hinter den Sinus zurücktritt, ist er im Hochschulkontext unverzichtbar.

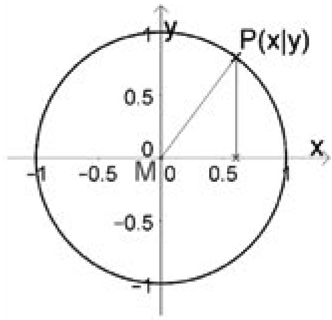
Aufgabe 3.2.16	nach cosh 61(a)(b)	MSA L2.6; L4.10	AHR L3.1; L4.1	A

Zeichnen Sie in ein Koordinatensystem einen Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0\,|\,0)$.

a) Zeichnen Sie einen Punkt P auf dem Einheitskreis ein, so dass für den zu P gehörenden Winkel α zur x-Achse $\sin(\alpha) = 0{,}6$ ist.

b) Begründen Sie, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ einen weiteren Punkt mit dieser Eigenschaft gibt.

c) Entnehmen Sie Ihrer Zeichnung einen Näherungswert für $\cos(\alpha)$.



d) Begründen Sie mithilfe des Einheitskreises, dass es für $0° \leq \alpha \leq 180°$ nur einen Punkt P gibt, für den gilt: $\cos(\alpha) = 0{,}8$.

e) Erläutern Sie, dass für alle Winkel $0° < \alpha < 90°$ gilt: $(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1$.

Kommentar:
Die hier thematisierten Kompetenzen sind grundlegend für das Verständnis des Sinus und des Cosinus.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

3.3 Elementare Funktionen

Aufgabe 3.3.1	nach cosh 85	MSA L4.2	AHR L4.1	A

Skizzieren Sie:

a) $y = -2 \cdot x + 3$
b) $-2 \cdot x + y - 5 = 0$
c) $x = 2$
d) Die Gerade mit der Steigung 3 durch den Punkt $P(0|3)$
e) Die Gerade mit der Steigung -2 durch den Punkt $P(2|3)$
f) Die Gerade durch die Punkte $A(-4|-3)$ und $B(1|3)$

Aufgabe 3.3.2	nach cosh 90	MSA L4.2; L4.5	AHR L1.1; L4.1	A

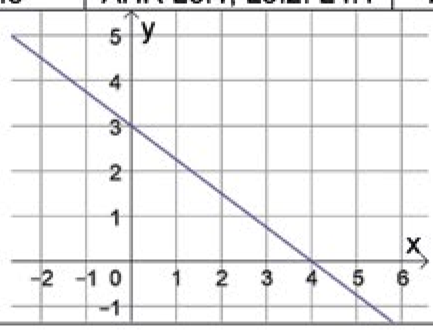
Zeichnen Sie die beiden Geraden g und h:

$$g: 2 \cdot x + y = 1$$
$$h: x - y = 3$$

Berechnen Sie den Schnittpunkt der beiden Geraden.
Überprüfen Sie Ihr Ergebnis an der Zeichnung.

Aufgabe 3.3.3		MSA L4.3; L4.8	AHR L3.1; L3.2: L4.1	A

Bestimmen Sie die Steigung der Geraden in der nebenstehenden Skizze.
Wie lautet die Gleichung der Geraden in der Form $y = m \cdot x + b$?



Aufgabe 3.3.4		MSA L4.1	AHR L4.1	A

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot x - 3$.

a) In welchen Punkten schneidet der Graph von f die Koordinatenachsen?
b) Liegt $P(9|-15)$ auf dem Graphen von f?
c) Welcher Punkt der Geraden hat die y-Koordinate 4?
d) Welche Gerade verläuft parallel zum Graphen durch den Punkt $Q(3|1)$?
e) In welchem Punkt schneidet der Graph von f den Graphen der Funktion g mit $g(x) = -3 \cdot x - 4$?

Aufgabe 3.3.5		MSA L4.1		A

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 - x + 1$.
Geben Sie jeweils an:
a) $f(3)$ b) $f(-a)$ c) $2 \cdot f(a)$ d) $f(a) - f(2)$ e) $f(2 \cdot a)$ f) $f(a-1)$

Aufgabe 3.3.6	cosh 37	MSA L4.8	AHR L1.1; L4.1	A

Bestimmen Sie die Nullstellen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = x^2 - 3 \cdot x - 4$.

Kommentar:
Eine Thematisierung der Grundmengen wird in der Schule nicht systematisch verfolgt und daher meist weggelassen. Es wird, wie in der Schule üblich, $x \in \mathbb{R}$ unterstellt.

Aufgabe 3.3.7		MSA L4.7	AHR L4.1	A

a) Begründen Sie, warum die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 3$ keine reellen Nullstellen hat.
b) Begründen Sie, dass f mit $f(x) = x^2 - 3$ keine rationalen Nullstellen hat.

Kommentar:
b) in Schule ungewöhnliche Frage

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.3.8		MSA L4.7	AHR L3.1; L4.1	B

Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 + b \cdot x + 4$.
Untersuchen Sie die Anzahl der Nullstellen des Graphen von f in Abhängigkeit von b.

Kommentar:
Der Umgang mit Parametern in diesem Kontext ist nicht Gegenstand der Bildungsstandards.
Lediglich in Fällen wie $f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 4$ wäre die Aufgabe der Kategorie A zuzuordnen.

Aufgabe 3.3.9			AHR L4.1; L4.2	B

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = \sqrt{2 \cdot x + 1} - 1$.
Geben Sie die Definitions- und Wertemenge an.

Kommentar:
Die sich aus den Funktionen des Sekundarbereichs I und der Einführungsphase in die Oberstufe ergebenden Funktionsklassen sollen bekannt sein. Dies gilt auch für die Sinusfunktion und $x \to \sqrt{x}$ sowie $x \to \ln(x)$. Dazu gehören auch Fragenstellungen zu Definitions- und Wertemenge. Die Klasse der transformierten Wurzelfunktionen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards, daher Kategorie B.

Aufgabe 3.3.10	cosh 19	MSA L4.8	AHR L1.1; L4.1	A

Jan formuliert die Lösung einer Aufgabe in „Kurzschreibweise“:

a) Ergänzen Sie die fehlende Rechnung.

b) Welches geometrische Problem hat Jan gelöst?

c) Interpretieren Sie das von Jan errechnete Ergebnis geometrisch.

$f(x) = 3x^2 - 12x - 5$

$g(x) = -6x - 8$

$f(x) = g(x):$

$3x^2 - 12x - 5 = -6x - 8$

$\Leftrightarrow \ldots$

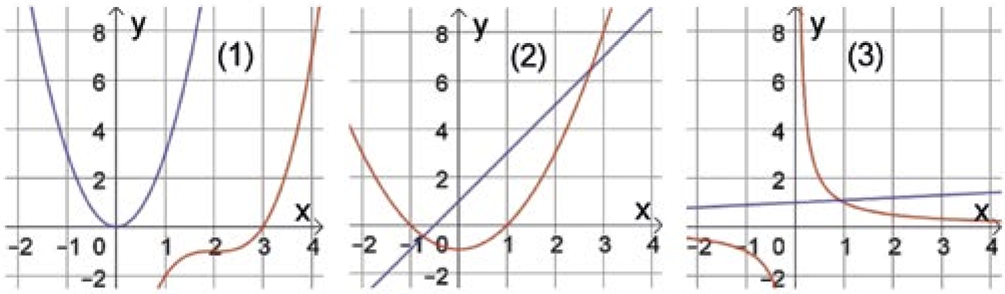
$\Leftrightarrow x = 1$

Kommentar:
Auf die Verwendung von Äquivalenzzeichen wird in der Schule nicht immer Wert gelegt. Die Aufgabenteile b) und c) sind sehr ähnlich. In Teil b) steht die Frage nach der Schnittstelle als solcher im Vordergrund, während in c) eine Interpretation des Schnittverhaltens (eine doppelte Lösung der Gleichung) betont wird.

Aufgabe 3.3.11		MSA L4.8		A

Ordnen Sie den Gleichungen passende Grafiken zu und machen Sie begründete Aussagen über die Anzahl der Lösungen.

(A) $2 \cdot x + 1 = x^2 - 1$ (B) $\frac{1}{x} = \frac{1}{10} \cdot x + 1$ (C) $3 \cdot x^2 = (x-2)^3 - 1$



Aufgabe 3.3.12			AHR L1.1; L4.1	A

Bestimmen Sie die Schnittstelle der Funktionen f und g mit $f(x) = \frac{1}{x+1}$ und $g(x) = -x + 1$.

In dieser Aufgabe darf ein graphikfähiger Taschenrechner verwendet werden.

Kommentar:
Diese Aufgabe lädt zu verschiedenen Lösungswegen ein (verschiedene Repräsentationsformen). Der Einsatz des Taschenrechners steht hier gleichberechtigt neben einer algebraischen Lösung, die das wichtige Thema Termumformungen wieder aufgreift. Selbst eine tabellarische Lösung mit Rechnereinsatz führt hier zum Ziel.
Es sei für f und g jeweils die maximale Definitionsmenge in $\mathbb{R}$ vorausgesetzt.

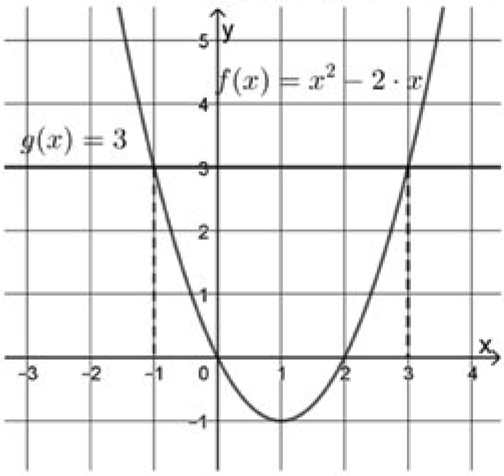
Die algebraische Lösung wird von Hochschulseite auch gewünscht. Damit könnte die Aufgabe jedoch in die Kategorie B fallen.

Prozessbezogene Kompetenz: Problemlösen

Aufgabe 3.3.13		MSA L4.8	AHR L4.1	A
Geben Sie die Gleichung einer linearen und einer quadratischen Funktion an, die jeweils die Nullstelle 2019 haben.				

Aufgabe 3.3.14	nach cosh 43	MSA L4.5	AHR L4.1	A
Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit $f(x)=3\cdot x-7$ und $g(x)=2+5\cdot x,\ x\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie den Bereich, in dem die Funktionswerte von f größer sind als die von g.				
Kommentar: Der formale Umgang mit Ungleichungen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards. Solche Aufgaben kommen jedoch in der Schule im Zusammenhang mit Sachkontexten vor.				

Aufgabe 3.3.15	nach cosh 44		AHR L4.1	A
Gegeben sind zwei Funktionen f und g mit $f(x)=x^2-2\cdot x$ und $g(x)=3,\ x\in\mathbb{R}$. Bestimmen Sie das Intervall, in dem die Funktionswerte von f kleiner sind als die von g.				
Kommentar: Obwohl Aufgaben dieses Typs nicht Gegenstand der Untersuchungen in der Schule sind, können bei linearen Funktionen z. B. im Zusammenhang mit Kontexten solche Fragestellungen vorkommen. Der formale Umgang mit Ungleichungen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards.				

Aufgabe 3.3.16	nach cosh 44		AHR L4.1	B
Für welche $x\in\mathbb{R}$ gilt $x^2-2\cdot x<3$? Florian benutzt dazu nebenstehende Abbildung. Seine Antwort ist: „x liegt zwischen -1 und 3“ Erläutern Sie sein Vorgehen.	 			
Kommentar: Aufgaben dieses Typs werden in der Schule nicht systematisch verfolgt. Sie erfordern Kompetenzen, zu denen Schule lediglich ein Grundverständnis anlegen kann.				

Aufgabe 3.3.17	nach cosh 44			C

Für welche $x \in IR$ gilt $x^2 - 2 \cdot x < 3$?

Florian legt nebenstehende Bearbeitung vor.
Erläutern Sie sein Vorgehen.

$$x^2 - 2 \cdot x < 3$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot x - 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-3) < 0$$
durch Vorzeichenbetrachtung:
$$x \in (1; -3)$$

Kommentar:
Der formale Umgang mit Ungleichungen ist nicht Bestandteil der Bildungsstandards. Auf die Verwendung von Äquivalenzzeichen wird in der Schule nicht immer Wert gelegt.

Aufgabe 3.3.18	cosh 89			C

Durch die Punkte $P(-3\,|\,3)$ und $Q(3\,|\,0)$ gehen unendlich viele Parabeln.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b, c der Parabelgleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ auf.
b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems.

Kommentar:
Die Frage unendlich vieler Parabeln durch zwei Punkte kann im schulischen Kontext behandelt werden, ist aber nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

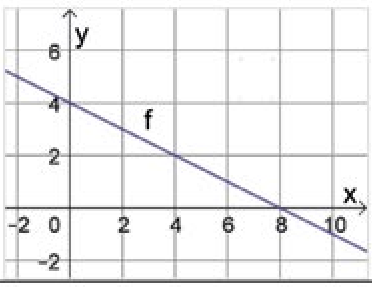
Aufgabe 3.3.19			AHR L4.2	a) A; b) A; c) C

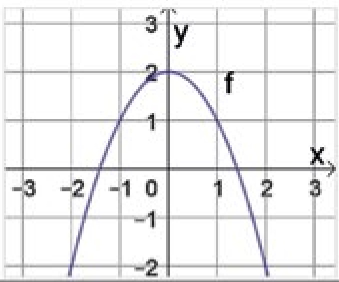
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g und h mit
a) $f(x) = (x+3)^2 - 2$
b) $g(x) = \ln(x-2)$
c) $h(x) = |\sin(x)|$

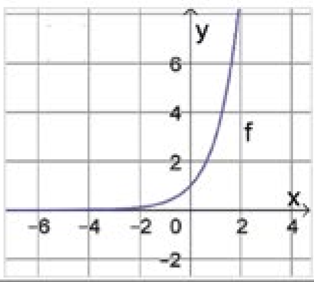
Kommentar:
Betragsfunktionen sind nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

Aufgabe 3.3.20		MSA L4.8	AHR L4.1	A

Geben Sie für die 3 Funktionsgraphen eine passende Funktionsgleichung an.







Aufgabe 3.3.21	nach cosh 66	MSA L4.8; L4.10	AHR L4.1; L4.2	A

Skizzieren Sie die Graphen zu

a) $y = \sin(x)$

b) $y = 2 \cdot \sin(x)$

c) $y = 2 + \sin(x)$

d) $y = \sin(2 \cdot x)$

e) $y = \sin(x + \pi)$

für $x \in [-2 \cdot \pi; 2 \cdot \pi]$.

Aufgabe 3.3.22		MSA L4.8; L4.10	AHR L4.1; L4.2	A

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion jeweils aus dem Graphen von f mit $f(x) = \sin(x)$ hervorgeht:

a) $g(x) = 2 \cdot \sin(x)$

b) $h(x) = -\sin(x)$

c) $i(x) = \sin(-x)$

d) $h(x) = \cos(x)$

e) $k(x) = \sin(2 \cdot x)$

f) $l(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

g) $m(x) = \sin(2 \cdot x + \pi)$

Aufgabe 3.3.23	cosh 63		AHR L4.2	A

Gesucht ist die ganzrationale Funktion niedrigsten Grades mit den drei Nullstellen $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, deren Graph durch den Punkt $(0 | 3)$ geht.

Kommentar:
Je nach Ansatz kann man die Aufgabe mit einer oder mit vier Gleichungen lösen.

Aufgabe 3.3.24	nach cosh 65	MSA L4.10	AHR L4.2	A

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin(2 \cdot x)$.
Bestimmen Sie die Periode p der Funktion f und geben Sie - ohne Hilfsmittel aus der Differentialrechnung - sämtliche Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte auf dem Intervall $0 \leq x < \pi$ an.

Kommentar:
Die Begriffe Hoch- und Tiefpunkte sind auch ohne die Leitideen von AHR L4.2 selbsterklärend – Wendepunkte jedoch nicht.

Aufgabe 3.3.25	nach cosh 65	MSA L4.10	AHR L4.2	A

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(2 \cdot x)$.
Bestimmen Sie die Periode p der Funktion f und geben Sie - ohne Hilfsmittel aus der Differentialrechnung - sämtliche Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte auf dem Intervall $0 \leq x < 2 \cdot \pi$ an.

Kommentar:
Die Begriffe Hoch- und Tiefpunkte sind auch ohne die Leitideen von AHR L4.2 selbsterklärend – Wendepunkte jedoch nicht.

Aufgabe 3.3.26	cosh 67		AHR L4.2	B

Gegeben seien die Funktionen f_1, f_2 und f_3 mit $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 1$ und $f_3(x) = \sqrt{x}$; $x \in \mathbb{R}_+$.

Bestimmen Sie die Funktionen g, h und k mit
a) $g(x) = f_3\left(f_1(x) + f_2(x)\right)$
b) $h(x) = f_3\left(f_1(x)\right) + f_2(x)$
c) $k(x) = f_1\left(f_2(x) + f_3(x)\right)$
Vereinfachen Sie dabei die Funktionsterme so weit wie möglich.

Kommentar:
Die Verkettung von Funktionen wird in der Schule nicht vertiefend behandelt.

Aufgabe 3.3.27			AHR L4.2	A

Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = 2 \cdot x + 3$.
Die Abbildungen stellen die Graphen von $h(x) = f\left(g(x)\right) = \sqrt{2 \cdot x + 3}$ bzw. $k(x) = g\left(f(x)\right) = 2 \cdot \sqrt{x} + 3$ dar.
Ordnen Sie die Graphen den verketteten Funktionen zu. Begründen Sie Ihre Zuordnung.

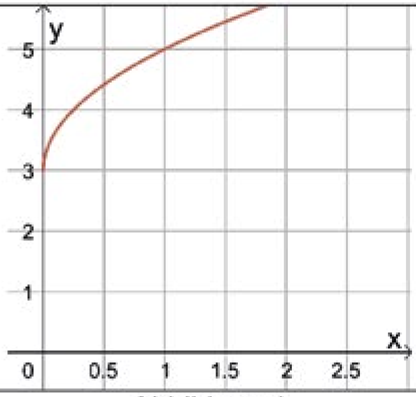


Abbildung 1

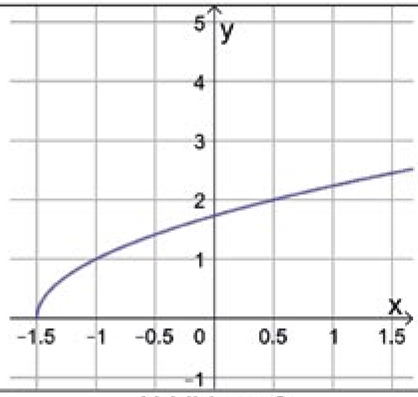


Abbildung 2

Aufgabe 3.3.28			AHR L4.2	B
Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x)=x^2-4$ und $g(x)=\sqrt{x}$. a) Geben Sie die Terme für $f(g(x))$ und $g(f(x))$ an. b) Geben Sie die maximalen Definitionsbereiche aller hier auftauchenden Funktionen an.				
Kommentar: Die Verkettung von Funktionen wird in der Schule nicht vertiefend behandelt.				

Aufgabe 3.3.29			AHR L4.2	B
Geben Sie ein Beispiel für Funktionen f und g an, für die gilt: $f(g(x))=2\cdot x$.				
Prozessbezogene Kompetenz: Problemlösen				
Kommentar: Die Verkettung von Funktionen wird in der Schule nicht vertiefend behandelt.				

3.4 Anwendungen

Aufgabe 3.4.1	nach cosh 1	MSA L1.7		A

Im Jahr 2006 hatte Deutschland 41,27 Millionen weibliche und 40,27 Millionen männliche Einwohner. In Baden-Württemberg lebten 10,75 Millionen Menschen, davon waren 50,88 % weiblich. Die Anzahl der Ausländer betrug in Deutschland 7,29 Millionen, in Baden-Württemberg 1,27 Millionen und in Hamburg 250.000.

a) Formulieren Sie Fragen, die mithilfe dieser Daten beantwortet werden können.
b) Erläutern Sie, warum die Frage, wie viele weibliche Ausländer in Baden-Württemberg leben, mit den gegebenen Informationen nicht beantwortet werden kann.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.4.2		MSA L1.1; L2.1; L2.3; L3.3	AHR L4.1	D

Das größte Schokoladen-Osterei der Welt stand im Pralinenland Belgien.
26 Meisterschokoladenmacher hatten hierfür 2000 kg Schokolade verarbeitet und zu einem riesigen Osterei aufgetürmt.

Stellen Sie dazu eine interessante mathematische Frage. Formulieren Sie dann Annahmen, mit deren Hilfe Sie die Frage beantworten können.

Beantworten Sie die Frage und machen Sie eine Plausibilitätsüberprüfung von Ihren Ergebnissen.

Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren

Aufgabe 3.4.3		MSA L4.4	AHR L3.1; L4.1	A

Herr Krüger möchte sein neues Schwimmbecken befüllen. Dazu stehen ihm verschiedene Schläuche zur Verfügung. Benutzt er nur einen Gartenschlauch, dauert es sechs Stunden, nimmt er die Leitung vom Brunnen, braucht Herr Krüger nur vier Stunden. Er kann aber auch einen Schlauch an den Hydranten anschließen. Dann wäre das Becken in drei Stunden voll. Da er ein sehr ungeduldiger Mensch ist, schließt er alle drei Schläuche gleichzeitig an.

Welchen Anteil des Beckens füllt der Gartenschlauch in einer Stunde?
Welchen Anteil des Beckens füllt der Hydrant in einer Stunde?
Wie lange dauert es, bis das Becken vollständig gefüllt ist?
Erläutern Sie Ihren Lösungsweg.

Prozessbezogene Kompetenz: Problemlösen

Aufgabe 3.4.4	nach cosh 7	MSA L2.1; L2.4	AHR L4.1	A

Im Jahr 2013 wurde in Baden-Württemberg auf einer Fläche von 11.333 ha ($1\,\text{ha} = 10\,000\,\text{m}^2$) Wein angebaut. Der durchschnittliche Ertrag pro Ar ($1\,\text{Ar} = 100\,\text{m}^2$) betrug 92 Liter.
Berechnen Sie überschlagsmäßig, wie viele Liter Wein in dem genannten Jahr produziert wurden.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.4.5		MSA L1.6; L1.11; L2.3	AHR L4.1	A

Wie viele Nadeln hat eine Fichte?

Geben Sie einen Schätzwert dafür an, wie viele Nadeln eine ausgewachsene Fichte (s. Foto rechts) hat.
Überlegen Sie, wie Sie zu einem genaueren Ergebnis kommen können.
Notieren Sie Gedanken und Rechnungen, die zum Ziel führen können.

Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren

Aufgabe 3.4.6	nach cosh 17	MSA L1.7	AHR L1.1; L4.1	A

Vor 200 Jahren wurden in Entenhausen 2 Dagos - das entspricht 0,3 € - bei einer Bank angelegt und jährlich mit 8 % fest verzinst.

a) Wie groß wäre das Guthaben heute, wenn die Zinsen stets wieder mitverzinst würden? Stellen Sie den Verlauf des Guthabens in Abhängigkeit von den Jahren graphisch dar.
b) Nach wie vielen Jahren wären die 2 Dagos auf 200 Dagos angewachsen?
c) Wie hoch müsste der Zinssatz sein, damit nach 200 Jahren das Guthaben umgerechnet 2.000.000 € beträgt?

Kommentar:
Bei dieser Aufgabe ist der Einsatz eines Rechners (ohne Verwendung der GTR- und CAS-Funktionalität) hilfreich.
In der Schule wird der Logarithmus als Umkehroperation behandelt. Der Begriff der Umkehrfunktion kommt nicht vor.

Aufgabe 3.4.7		MSA L4.4	AHR L4.1	A

Zum Bau einer Rohrleitung innerhalb von 18 Tagen werden 6 Facharbeiter benötigt.
Wie viele Arbeiter benötigt man, wenn für den Bau nur 12 Tage zur Verfügung stehen?
Erläutern Sie, ob die Annahme eines linearen Modells sinnvoll ist.

Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren, Argumentieren

Aufgabe 3.4.8	cosh 32	MSA L1.7	AHR L1.1; L4.1	A

Der Aktienkurs der Firma XXL fällt im Jahr 2011 um 10 % und wächst in den Jahren 2012 und 2013 um je 5 %.
Wo steht der Kurs Ende 2013 im Vergleich zum Beginn von 2011?

Aufgabe 3.4.9	nach cosh 26	MSA L4.1		a) A; b) B

Fließt ein Gleichstrom durch eine verdünnte Kupfersulfatlösung, so entsteht am negativen Pol metallisches Kupfer. Die abgeschiedene Kupfermenge ist sowohl zur Dauer des Stromflusses, als auch zur Stromstärke direkt proportional. Bei einer Stromstärke von 0,4 A werden in 15 Minuten 0,12 g Kupfer abgeschieden.

a) Wie lange dauert es, bis 0,24 g Kupfer bei einer Stromstärke von 0,4 A abgeschieden werden?
b) Wie lange dauert es, bis 0,24 g Kupfer bei einer Stromstärke von 1 A abgeschieden werden?

Kommentar:
Der Aufgabenteil b) ist mathematisch einfach. Der Sachkontext ist jedoch nicht repräsentativ für im Mathematikunterricht behandelte Kontexte.

Aufgabe 3.4.10	cosh 28 (a)	MSA L1.4		B

Für den Gesamtwiderstand R zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 gilt

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Lösen Sie die Gleichung nach R auf.

Kommentar:
Die Kompetenzen zur Lösung solcher Aufgaben werden im Sekundarbereich I angelegt. Bei Angabe konkreter Werte für die Parameter R_1 und R_2 würde die Aufgabe in die Kategorie A fallen.

Aufgabe 3.4.11	cosh 31	MSA L1.4		B

Vereinfachen Sie $\dfrac{\frac{1}{\omega \cdot C}}{\frac{1}{\omega \cdot C} + R}$.

Kommentar:
Die Kompetenzen zur Lösung solcher Aufgaben werden im Sekundarbereich I angelegt. Bei Angabe konkreter Werte für die Parameter ω, C und R würde die Aufgabe in die Kategorie A fallen.

Aufgabe 3.4.12	a) cosh 57	MSA L2.6	AHR L1.1; L4.1	A

a) Eine 4 m lange Leiter wird in einer Höhe von 3 m an eine Hauswand gelehnt. Welchen Winkel schließt die Leiter mit dem Boden ein?

b) Eine Standleiter hat im zugeklappten Zustand eine Länge von 2 m. Aufgestellt erreicht sie eine Höhe von 1,80 m.
Berechnen Sie den Öffnungswinkel an der Spitze.

b) Prozessbezogene Kompetenz: Problemlösen

Aufgabe 3.4.13	nach cosh 58	MSA L2.6	AHR L1.1, L4.1	A

Von der auf 1800 m Höhe gelegenen Bergstation einer Seilbahn erscheint die auf 1100 m Höhe gelegene Talstation unter einem Blickwinkel von 42° gegenüber der Waagerechten. Fertigen Sie eine Skizze an und berechnen Sie die fehlenden Längen.

Aufgabe 3.4.14	nach cosh 2	MSA L4.2; L4.3	AHR L3.1; L4.1	A

Die Geschwindigkeit eines Autos beträgt $20\frac{\text{m}}{\text{s}}$ zu Beginn der Beobachtung. Innerhalb der nächsten 10 s nimmt die Geschwindigkeit gleichmäßig bis zum Stillstand ab.

a) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.

b) Geben Sie den zugehörigen Funktionsterm der Geschwindigkeit bezüglich der Zeit an.

Aufgabe 3.4.15	nach cosh 3	MSA L4.10	AHR L3.1; L4.1	a) D; b) A

Für den Temperaturverlauf an einem Sommertag sind folgende Informationen bekannt: Um 16:00 Uhr ist die Temperatur mit 25°C am höchsten. Nachts um 4:00 Uhr ist es mit 3°C am kältesten.

a) Beschreiben Sie den Temperaturverlauf mit Hilfe einer Sinusfunktion, d. h. bestimmen Sie eine passende Funktionsgleichung.

b) Diskutieren Sie, inwiefern eine Modellierung mit Hilfe einer Sinusfunktion sinnvoll ist.

Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren

Aufgabe 3.4.16		MSA L4.11	AHR L2.2; L2.3	A

Die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 1$ beschreibt im Intervall $[1\,;3]$ den Verlauf eines Wasserstandes in Abhängigkeit von der Zeit.
Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate im gegebenen Intervall.

Aufgabe 3.4.17		MSA L1.1; L4.9	AHR L4.1	A

a) Angenommen, die Gleichung $f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + x + 2$ (x und $f(x)$ in Meter) modelliert die Flugbahn eines Fußballs, den ein Spieler einwirft.
Bei welcher Weite befindet sich der höchste Punkt der Flugbahn? Wie weit fliegt der Ball? In welcher Höhe wurde der Ball abgeworfen?

b) Ein Fußball fliegt bei einem Freistoß 60 m weit. Der höchste Punkt seiner parabelförmigen Flugbahn ist 6 m hoch.
- Skizzieren Sie den Flug des Balles in einem Koordinatensystem und beschriften Sie die Skizze.
- Welche Koordinaten hat der Scheitelpunkt der Flugbahn?
- Welche Funktionsgleichung passt zu dem Freistoß? Begründen Sie.

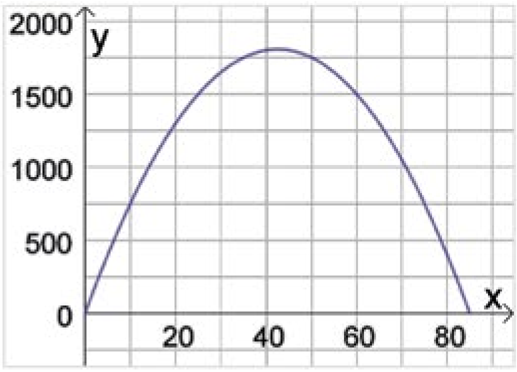
(1) $f(x) = -\frac{1}{150} \cdot x \cdot (x-60)$ (2) $f(x) = -\frac{1}{60} \cdot x^2 + 30 \cdot x + 6$ (3) $f(x) = -\frac{1}{150} \cdot x^2 + \frac{2}{5} \cdot x$

Aufgabe 3.4.18		MSA L4.9		D

Die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 85 \cdot x$ stellt den Gewinn eines Unternehmens in Abhängigkeit vom Verkaufspreis des Produktes dar.

a) Formulieren Sie Fragen, die sich mit dem Graphen der Funktion beantworten lassen.

b) Sie sollen die Geschäftsleitung beraten. Schreiben Sie einen Bericht zu der Gewinnentwicklung. Bestimmen Sie dazu auch charakteristische Werte.



Kommentar: Das mathematisch begründete Argumentieren ist hier anspruchsvoll.

Aufgabe 3.4.19		MSA L1.11; L4.9		D

Mithilfe von Messgeräten wurden die folgenden Daten für den Flug eines Hammers beim Hammerwerfen aufgezeichnet:

x (m)	0	10	20	30	40	50	60	70
H(x) (m)	0	5,1	9,3	10,5	11	8,7	5,4	0

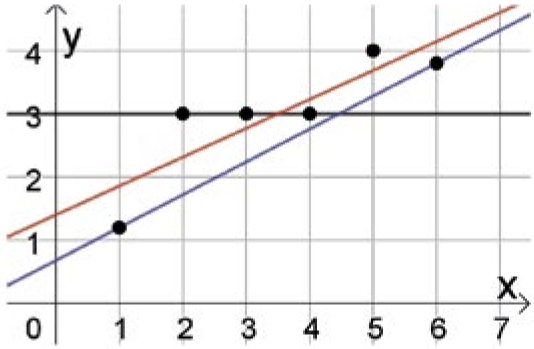
Erstellen Sie mit verschiedenen Methoden quadratische Modelle und vergleiche Sie diese.

Kommentar:
Ziel der Aufgabe ist die prozessorientierte Kompetenz des Modellierens.
Bewusst werden unterschiedliche Modelle und darauf basierende unterschiedliche Prognosen zugelassen.

Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren

Aufgabe 3.4.20		MSA L1.11		D

Nora, Peter und Greta diskutieren darüber, welche Gerade als Ausgleichsgerade gewählt werden soll.
Nora: „Sie soll möglichst viele Datenpunkte treffen."
Peter: „Sie soll den ersten und den letzten Datenpunkt verbinden."
Greta: „Weder noch! Sie soll …"
Was will Greta sagen?
Nehmen Sie Stellung zu den Aussagen.



Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren

3.5 Analysis

Aufgabe 3.5.1			AHR L1.3; L2.2	A

Beschreiben Sie den Übergang von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung am Beispiel der Funktion f mit $f(x)=x^2$.

Kommentar:
Bei dieser Aufgabe liegt der Fokus auf der korrekten Verwendung der Fachsprache um mathematische Sachverhalte zu erklären. Dabei werden der propädeutische Grenzwertbegriff thematisiert und gleichzeitig verständnisorientiert mathematische Grundkonzepte erläutert.

Aufgabe 3.5.2	nach cosh 74		AHR L4.3; L4.5	A

Geben Sie eine Gleichung der Ableitungsfunktion an.

a) $f(x)=x^n\,;n\in\mathbf{Z}'$
b) $f(x)=e^x$
c) $f(x)=\sqrt{x}$
d) $f(x)=\sin(x)$
e) $f(x)=\cos(x)$
f) $f(x)=\ln(x)$
g) $f(x)=e^5$
h) $f(x)=\ln(3)$

Aufgabe 3.5.3	nach cosh 75		AHR L4.5; L4.6; L4.14	A, e) C

Bestimmen Sie die Ableitung folgender Funktionen:

a) $f(x)=x^3-6\cdot x+1$
b) $f(x)=(1-x)^9$
c) $f(x)=x\cdot e^{2\cdot x}$
d) $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$
e) $f(x)=(1-x^2)^9$

Kommentar:
Die Kettenregel ist lediglich für Kurse auf erhöhtem Anforderungsniveau Bestandteil der Bildungsstandards. Teilaufgabe e) ist damit der Kategorie C zuzuordnen.
Die Kettenregel wird in Kursen auf grundlegendem Anforderungsniveau nur bei linearer innerer Funktion behandelt.
Die Kenntnis der Kettenregel im Sonderfall linearer innerer Funktion reicht bereits in den ersten Studienwochen in MINT-Fächern oft nicht aus.

Aufgabe 3.5.4			AHR L4.6; L4.14	a) A, b) C

a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{2 \cdot x + 1}$.
Geben Sie die verwendeten Ableitungsregeln an.

b) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$.
Geben Sie die verwendeten Ableitungsregeln an.

Kommentar:
Die Kettenregel ist lediglich für Kurse auf erhöhtem Anforderungsniveau Bestandteil der Bildungsstandards. Teilaufgabe b) ist damit der Kategorie C zuzuordnen. Die Kettenregel wird in Kursen auf grundlegendem Anforderungsniveau nur mit linearer innerer Funktion behandelt.
Die Kenntnis der Kettenregel im Sonderfall linearer innerer Funktion reicht bereits in den ersten Studienwochen in MINT-Fächern oft nicht aus.

Aufgabe 3.5.5	cosh 76		AHR L4.4; L4.5; L4.7	A

Berechnen Sie die Extrem- und Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6 \cdot x + 1$.
In welchem Bereich ist die Funktion f monoton fallend?

Aufgabe 3.5.6	cosh 77		AHR L4.7; L4.14	A

Gegeben sei die Funktion f durch $f(x) = x \cdot e^{-0,5 \cdot x}$.
Bestimmen Sie den Extrempunkt des Graphen von f und weisen Sie rechnerisch nach, dass es sich um einen Hochpunkt handelt.

Aufgabe 3.5.7			AHR L2.2; L4.4; L4.5	A

Gegeben sind $f(x) = (x-1) \cdot (x+2)$ und $g(x) = 3 \cdot x - 2$.

a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.
b) Bestimmen Sie jeweils die Steigung der Graphen von f und g in ihren Schnittpunkten.
c) In welchem Punkt hat der Graph von f die gleiche Steigung wie der von g?

Aufgabe 3.5.8	cosh 82		AHR L4.11	a)-c) A, d) B

Geben Sie eine Stammfunktion F der Funktion f an.

a) $f(x) = x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$

b) $f(x) = \frac{2}{x^2}$

c) $f(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x}$

d) $f(x) = \sqrt{5 \cdot x - 1}$

Kommentar:
Komplexere Wurzelfunktionen sind nicht Bestandteil der Bildungsstandards.

Aufgabe 3.5.9	cosh 83		AHR L4.11	A

Berechnen Sie:

a) $\int_{-1}^{2} (2 \cdot x^3 + 1)\, dx$

b) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2 \cdot x))\, dx$

Kommentar:
Fragestellungen wie in Aufgabenteil b) sind Gegenstand des Unterrichts auf erhöhtem Anforderungsniveau.

Aufgabe 3.5.10	cosh 84		AHR L2.4; L4.1	A

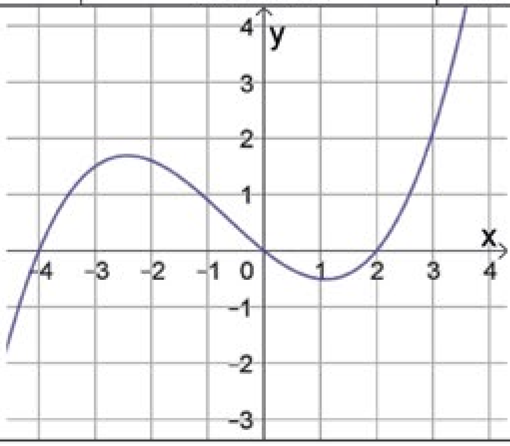
Gegeben seien die Funktionen f und g mit $f(x) = -x^2 + 4$ und $g(x) = 2 \cdot x + 1$.

a) Skizzieren Sie die Graphen der beiden Funktionen.
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x - Achse einschließt.
c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird.

Aufgabe 3.5.11	cosh 73		AHR L4.8	A

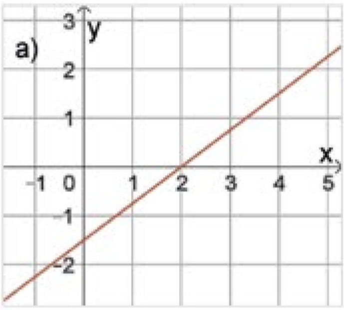
Gegeben ist der Graph einer Funktion f.

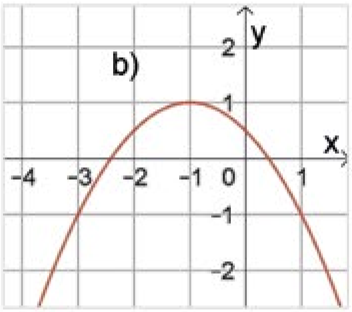
Skizzieren Sie in dasselbe Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion f'.

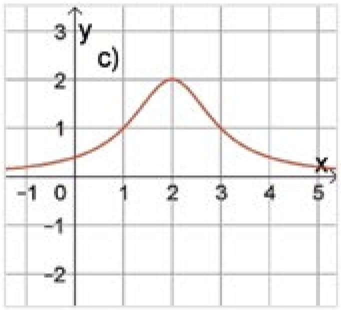


Aufgabe 3.5.12			AHR L4.8	A

Skizzieren Sie nach Augenmaß zu den gegebenen Ableitungsgraphen den Graphen einer Ausgangsfunktion.





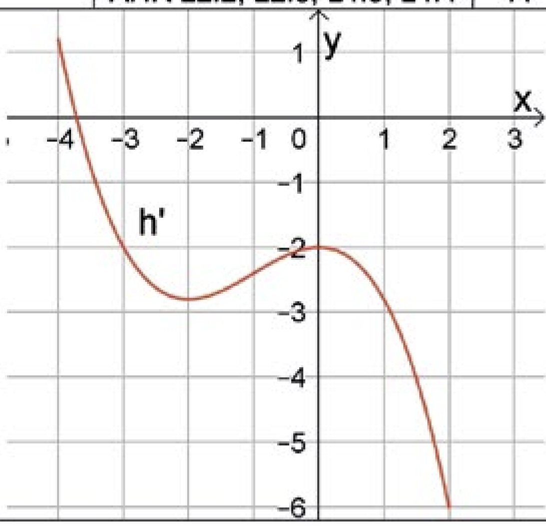


Aufgabe 3.5.13	nach cosh 14		AHR L2.2; L2.3; L4.3; L4.4	A

Die Abbildung rechts zeigt für $-4 \leq x \leq 2$ einen Ausschnitt aus dem Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion h. Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

- $x_1 = 0$ ist eine Wendestelle von h.
- $h''(-2) = 1$
- Die Funktion h ist auf dem Intervall $[-3;1]$ streng monoton fallend.

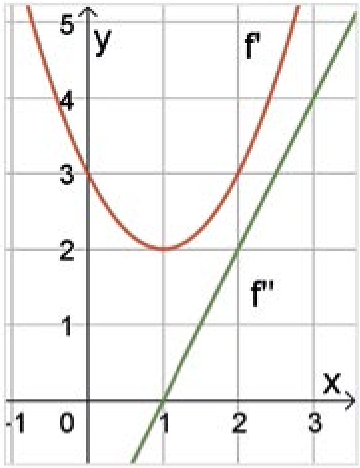
Skizzieren Sie den Graphen von h''.



Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.14			AHR L4.7	A

Gegeben ist eine Funktion f.
In dem Bild rechts sind die Graphen von f' und f'' dargestellt.
Es sind alle wesentlichen Eigenschaften von f' und f'' zu erkennen. Insbesondere gilt $f(1) = 0$.



Prüfen Sie mit Hilfe der abgebildeten Graphen f' und f'', welche der folgenden Eigenschaften der Funktion f plausibel sind.

a) f hat bei $x = 1$ eine Extremstelle
b) f kann keine Extremstellen haben
c) f hat bei $x = 1$ eine Wendestelle
d) f hat bei $x = 1$ eine Wendestelle mit horizontaler Tangente

Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.15			AHR L2.3; L4.3; L4.4	A

Welche der folgenden Aussagen über ganzrationale Funktionen sind korrekt?
Begründen Sie!

- Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann ist x_0 eine Extremstelle von f.
- Wenn x_0 eine Extremstelle von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.
- Ist $f''(x_0) > 0$, so ist der Punkt $P(x_0 | f(x_0))$ ein Tiefpunkt des Graphen von f.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.16			AHR L4.7	A

Die Funktionen f und g sind monoton wachsend.
Untersuchen Sie, ob auch die Funktion f + g monoton wachsend ist.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.17	cosh 71		AHR L2.2; L4.2; L4.3	A

Sind die folgenden Aussagen wahr, falsch oder unentscheidbar?
Erläutern Sie ggf. Ihre Entscheidung mithilfe einer Skizze.

a) Besitzt die Funktion f an der Stelle 2 den Funktionswert 1, so gilt $f'(2)=1$.
b) Gilt $f'(2)=1$, so hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1|f(1))$ die Steigung 2.
c) Die momentane Änderungsrate der Funktion f mit $f(x)=-0{,}5\cdot x^2+2$ an der Stelle -3 ist positiv.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.18	cosh 62		AHR L4.1; L4.4; L4.7	A

Welche der folgenden Aussagen sind falsch?
Geben Sie für die falschen Aussagen ein Gegenbeispiel an.

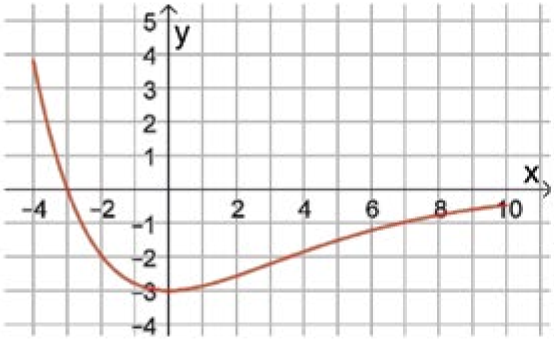
a) Eine Polynomfunktion ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle.
b) Eine Polynomfunktion geraden Grades hat keine Nullstellen.
c) Quadratische Funktionen haben keine Wendestellen.
d) Die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Definitionsmenge.
e) Die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{x}$ hat die Menge aller reellen Zahlen als Wertemenge.
f) Alle Funktionen f mit $f(x)=a^x$ (mit $a>0$) sind streng monoton wachsend.
g) Der Graph der Funktion f mit $f(x)=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.
h) Die Definitionsmenge der Funktion f mit $f(x)=\sqrt{x+5}$ ist die Menge aller reellen Zahlen, die größer als 5 sind.
i) Die Maximalstellen der Funktion f mit $f(x)=\sin(x)$ sind Wendestellen der Funktion g mit $g(x)=\cos(x)$.

Kommentar:
Potenzfunktionen sind nicht in den Leitideen des MSA enthalten.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.19	nach cosh 72		AHR L4.8	A

Die Abbildung zeigt für $-4 \leq x \leq 10$ den Graphen der Ableitungsfunktion h' einer Funktion.
Der Graph von h' hat eine Nullstelle bei $x = -3$ und eine horizontale Tangente für $x = 0$.



Entscheiden und begründen Sie, ob gilt:

a) Die Funktion h ist auf dem Intervall $3 < x < 10$ streng monoton fallend.
b) Die Funktion h hat an der Stelle -3 ein Minimum.
c) $x = 0$ ist eine Wendestelle von h.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.20	cosh 81		AHR L4.9; L4.10	A

Gegeben sei eine Funktion f und ihre Ableitung f'.

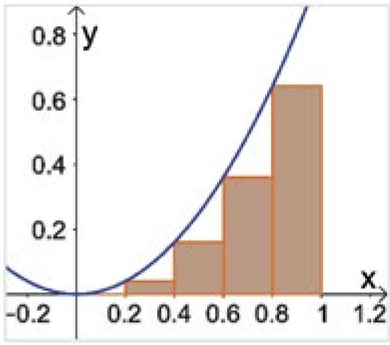
Welche Aussagen sind richtig?

a) Die Funktion f hat genau eine Ableitung aber viele Stammfunktionen.
b) Sind F und G Stammfunktionen zu f, so ist auch die Summe F + G eine Stammfunktion zu f.
c) Ist F Stammfunktion von f, so gilt $f'(x) = F(x)$.
d) Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.21	nach cosh 79		AHR L2.4; L4.9	A

Gegeben ist eine Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Das Bild rechts stellt einen Ausschnitt aus deren Graphen und einer Untersumme für fünf Unterteilungen des Intervalls $[0;1]$ dar.



a) Berechnen Sie einen Näherungswert für das Integral $\int_0^1 x^2\,dx$, indem Sie das Intervall in fünf gleiche Teile teilen und damit die Untersumme berechnen.

b) Erläutern Sie, wie man den Näherungswert verbessern kann.

c) Beschreiben Sie, wie man den exakten Wert des Integrals mithilfe der Untersumme erhält.

Kommentar:
Bei dieser Aufgabe liegt der Fokus auf der korrekten Verwendung der Fachsprache, um mathematische Sachverhalte zu erklären. Dabei werden der propädeutische Grenzwertbegriff thematisiert und gleichzeitig verständnisorientiert mathematische Grundkonzepte erläutert.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.5.22	nach cosh 70		AHR L1.3	B; g), h) C

Wie verhält sich die Funktion f in den folgenden Fällen

a) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ für $x \to \infty$;

b) $f(x) = \frac{2 \cdot x}{x+2}$ für $x \to \infty$;

c) $f(x) = \frac{2 \cdot x^2}{x+2}$ für $x \to \infty$;

d) $f(x) = \frac{2 \cdot x^2}{x+2}$ für $x \to -\infty$;

e) $f(n) = (-0{,}5)^n$ für $n \to \infty$ $(n \in \mathrm{IN})$;

f) $f(n) = (-1)^n$ für $n \to \infty$ $(n \in \mathrm{IN})$;

g) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ für $x \to -1$;

h) $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ für $x \to -1$.

Kommentar:
Gebrochen rationale Funktionen werden gemäß Bildungsstandards in der Schule nicht untersucht.

Aufgabe 3.5.23			AHR L1.3	B

Gegeben ist die Funktion f mit

a) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ b) $f(x)=\frac{x^2+4}{x-2}$

Beschreiben Sie, was geschieht, wenn sich x der Zahl 2 nähert.

Kommentar:
Bei dieser Aufgabe werden der propädeutische Grenzwertbegriff thematisiert und gleichzeitig verständnisorientiert mathematische Grundkonzepte erläutert.
Komplexere gebrochen rationale Funktionen wie hier angegeben sind in der Regel nicht Gegenstand des Unterrichts in der Schule.

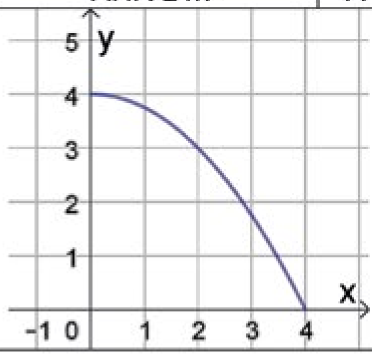
Aufgabe 3.5.24	cosh 69		AHR L4.1; L4.2	A

a) Bestimmen Sie die Funktion f mit $f(x)=a^x$; $a>0$, deren Graph durch den Punkt $P(2\,|\,49)$ geht.

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion vierten Grades ist achsensymmetrisch zur y-Achse, schneidet die y-Achse 2 Einheiten oberhalb des Ursprungs und hat den Hochpunkt $H(1\,|\,3)$.
Bestimmen Sie die Funktion f.

Aufgabe 3.5.25	cosh 78		AHR L4.7	A

Zwei Seiten eines Rechtecks liegen auf den positiven Koordinatenachsen, ein Eckpunkt auf dem abgebildeten Stück der Parabel mit der Gleichung $y=-0{,}25\cdot x^2+4$.
Wie groß müssen die Seitenlängen dieses Rechtecks sein, damit sein Umfang maximal wird?
Wie groß ist dann der Umfang?



Aufgabe 3.5.26	cosh 64		AHR L4.3; L4.4; L4.14	A

Der radioaktive Zerfall lässt sich durch die Funktionsgleichung $n(t)=n_0\cdot e^{-k\cdot t}$ beschreiben. Die Zahl n(t) gibt die Anzahl der Atome nach t Zeiteinheiten wieder, $n_0=n(0)$ ist der Bestand an Atomen zur Zeit $t=0$. Die Zahl $k>0$ ist die Zerfallskonstante mit der Einheit 1/Zeiteinheit.

a) Ermitteln Sie die Halbwertszeit t_h nach der die Zahl der anfangs vorhandenen Atome durch Zerfall auf die Hälfte abgenommen hat.
Nach welcher Zeit, ausgedrückt in Halbwertszeiten, sind von dem radioaktiven Stoff nur noch 25°%, 5°% beziehungsweise 1°% vorhanden?

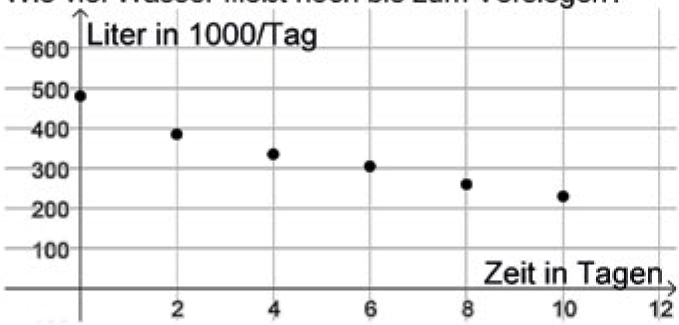
b) Die Tangente an die Kurve von n im Punkt $(0\,|\,n_0)$ schneidet die t-Achse im Punkt $(T\,|\,0)$. Bestimmen Sie T.
Welcher Anteil des Anfangswertes n_0 ist zur Zeit T noch vorhanden?

Aufgabe 3.5.27	cosh 80		AHR L4.9; L4.11	A

Bei einem Wasserbecken, das zu Beginn $2000\,m^3$ Wasser enthält, fließt Wasser ein und aus. Die Wasserzuflussrate kann für $t \in [0;70]$ durch die Funktion f beschrieben werden:
$f(t) = -t^2 + 40 \cdot t + 225$ (t in Tagen seit Beginn, $f(t)$ in m^3 / Tag).
Bestimmen Sie die Funktion, die die vorhandene Wassermenge zu jedem Zeitpunkt angibt.
Wie viel Wasser befindet sich nach 30 Tagen im Wasserbecken?

Aufgabe 3.5.28			AHR L4.9; L4.11	A

Wegen mangelnder Regengüsse versiegt eine Quelle. Die Geschwindigkeiten, mit denen das Wasser an verschiedenen Tagen aus der Quelle sprudelt, lassen sich der Tabelle und der Grafik entnehmen. Schätzen Sie ab:
Wie viel Wasser liefert die Quelle in acht Tagen?
Wie viel Wasser fließt noch bis zum Versiegen?



Tage	Liter in 1000/Tag
0	480
2	385
4	335
6	305
8	260
10	230

Prozessbezogene Kompetenz: Modellieren

3.6 Lineare Algebra/Analytische Geometrie

Aufgabe 3.6.1	cosh 92		AHR L2.1; L3.1; L3.2	A

Überprüfen Sie, ob das Viereck mit den Ecken $A(1|4|-1)$, $B(8|8|4)$, $C(4|4|3)$, $D(-3|0|-2)$ ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 3.6.2	nach cosh 93		AHR L3.1; L3.2	A

Vereinfachen Sie

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

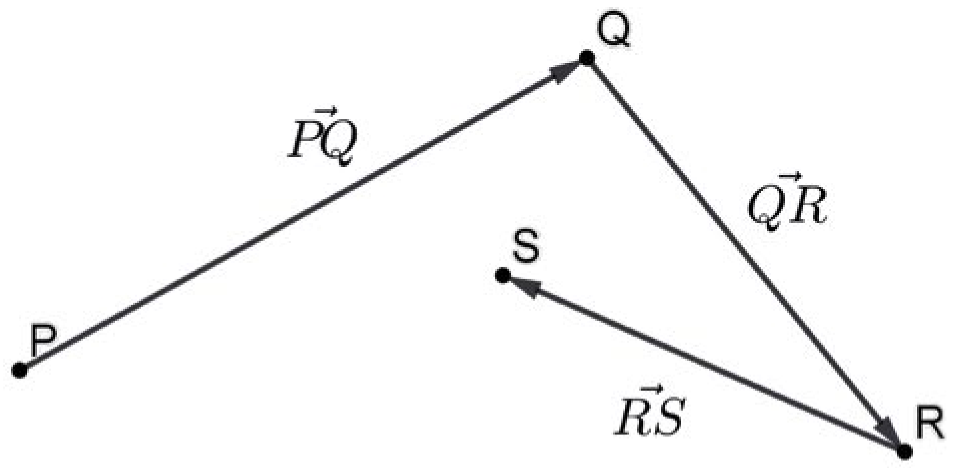
b) $2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$

Seien P, Q, R und S Punkte im Raum (siehe beispielhafte Skizze).
Skizzieren Sie die angegebenen Vektoren. Vereinfachen Sie gegebenenfalls zunächst.

c) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$

d) $\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RQ}$

e) $\overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR}) + \overrightarrow{RS}$



Aufgabe 3.6.3	cosh 94		AHR L3.1; L3.2	A

Skizzieren Sie die Gerade g und geben Sie die Gleichung der Geraden in der Form $y = m \cdot x + b$ an.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3.6.4	cosh 95		AHR L3.1; L3.2	A

Gegeben sei die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie p so, dass $P(p \mid 2 \mid -2)$ in dieser Ebene liegt.

Aufgabe 3.6.5	nach cosh 96		AHR L3.1; L3.2; L3.5	A

Welche Lagebeziehung haben die Geraden g und h mit

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ -15 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}; s \in \mathbb{R}$$

zueinander?
Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3.7 Stochastik

Aufgabe 3.7.1		MSA L5.7		A

In einer Urne befinden sich 7 gleichartige Kugeln, davon 4 blaue, 2 grüne und 1 rote. Nacheinander werden zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse

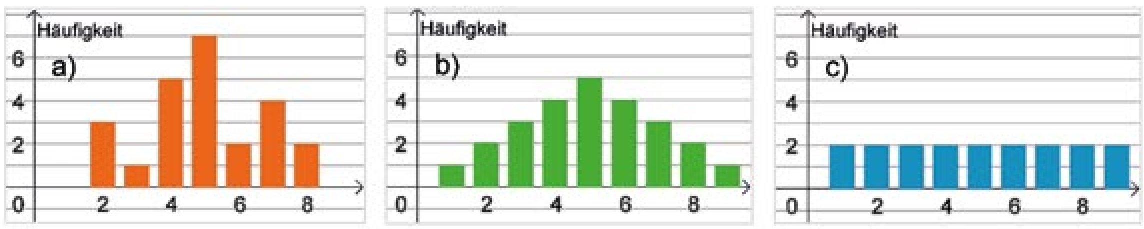
E_1: Die erste Kugel ist blau, die zweite Kugel ist rot.

E_2: Genau eine Kugel ist grün.

b) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1, wenn die erste gezogene Kugel nicht zurückgelegt wird?

Aufgabe 3.7.2		MSA L5.1; L5.4	AHR L5.1	A

Bestimmen Sie zu den drei Verteilungen arithmetisches Mittel, Median und Standardabweichung. Vergleichen Sie die Verteilungen bezüglich dieser Kenngrößen.



Aufgabe 3.7.3		MSA L5.4	AHR L5.1	A

Das arithmetische Mittel des Alters der Mitglieder eines Tennisclubs ist 35 Jahre, der Median ebenfalls.

a) Welche Schlüsse kann man aus der Information ziehen, dass der Altersmedian 35 Jahre beträgt?

b) Nennen Sie zwei verschiedene, mögliche Altersverteilungen, wenn das arithmetische Mittel des Alters 35 Jahre beträgt.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.4		MSA L5.7	AHR L5.5	D

Mara, Leo und Lukas benötigen für ein besonderes Würfelspiel einen Dodekaeder (regelmäßiger 12-Flächner). Da sie keinen Dodekaeder haben, wollen sie sich anders behelfen.
Leo: „*Wir nehmen zwei gewöhnliche Würfel und bilden die Augensumme.*"
Mara: „*Wir basteln uns ein Glücksrad mit 12 Sektoren.*"
Lukas: „*Wir würfeln mit einer Münze und einem gewöhnlichen Würfel. Erscheint Zahl, wird das Würfelergebnis verdoppelt.*"
Nehmen Sie Stellung zu den Aussagen der Kinder.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.5		MSA L5.7	AHR L5.2	D

In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wurde jedes Gruppenmitglied danach befragt, wer an einer Grippe erkrankte.

Gruppe	B	nicht B	Summe
A	60	540	600
nicht A	120	180	300
Summe	180	720	900

Die Ergebnisse sind in einer Vierfeldertafel dargestellt. Das Ereignis A sei „Person ist geimpft" und das Ereignis B: „Person ist erkrankt".
Berechnen Sie
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person geimpft ist?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person nicht geimpft und erkrankt ist?
c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, von der man weiß, dass sie geimpft ist, erkrankt?

Aufgabe 3.7.6			AHR L5.2	D

Der Anteil der Tuberkuloseerkrankten in Deutschland liegt bei 0,2 %. Durch eine Untersuchung kann eine Erkrankung festgestellt werden. Allerdings werden 30 % der kranken Personen fälschlicherweise negativ getestet und 2 % der gesunden Personen fälschlicherweise positiv getestet.
a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit tatsächlich krank zu sein, wenn man positiv getestet wird.
b) Beurteilen Sie die Güte des Tests anhand der Ergebnisse.

Aufgabe 3.7.7			AHR L5.4	D

Ein Hobby-Fußballer übt für das ZDF-Torwandschießen. Dabei darf man insgesamt sechsmal auf die Torwand schießen. Er kalkuliert, dass er im Durchschnitt bei 10 % seiner Versuche einen Treffer erzielt.

a) Begründen Sie, dass die mögliche Anzahl der Treffer beim Torwandschießen in diesem Fall als binomialverteilt modelliert werden kann. Nennen Sie realistische Gründe, die gegen diese Annahme sprechen.

Es gilt nun tatsächlich die Annahme, dass die mögliche Anzahl der Treffer des Hobby-Fußballers binomialverteilt ist.

b) Geben Sie ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$$P(A) = 0{,}9^6; \quad P(B) = \binom{6}{2} \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2.$$

Aufgabe 3.7.8			AHR L5.4	D

Die Zufallsvariable X ist binomialverteilt mit $n = 10$ und $p = 0{,}6$.

a) Geben Sie an, welche der Abbildungen die Verteilung von X darstellt. Begründen Sie Ihre Auswahl.

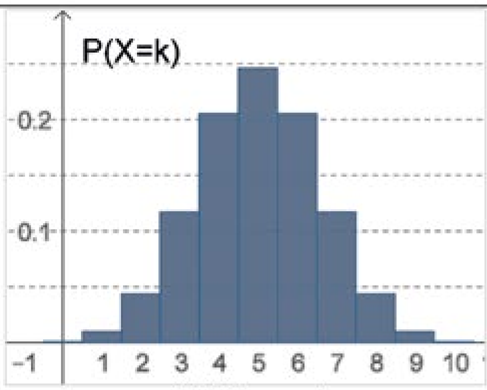


Abbildung 1

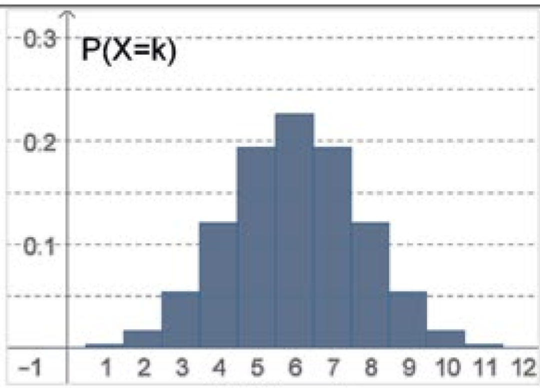


Abbildung 2

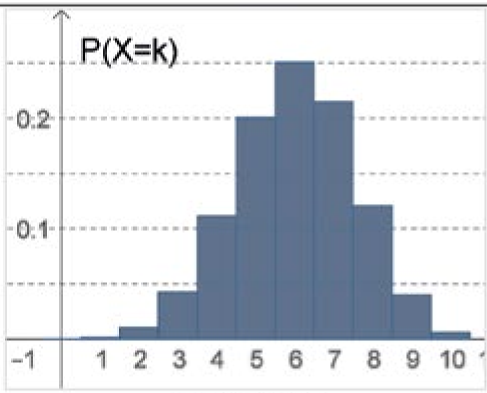


Abbildung 3

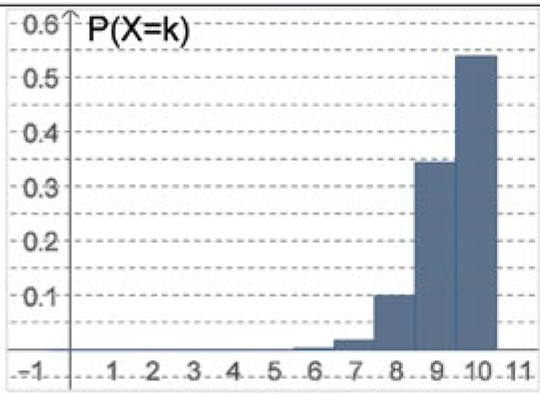
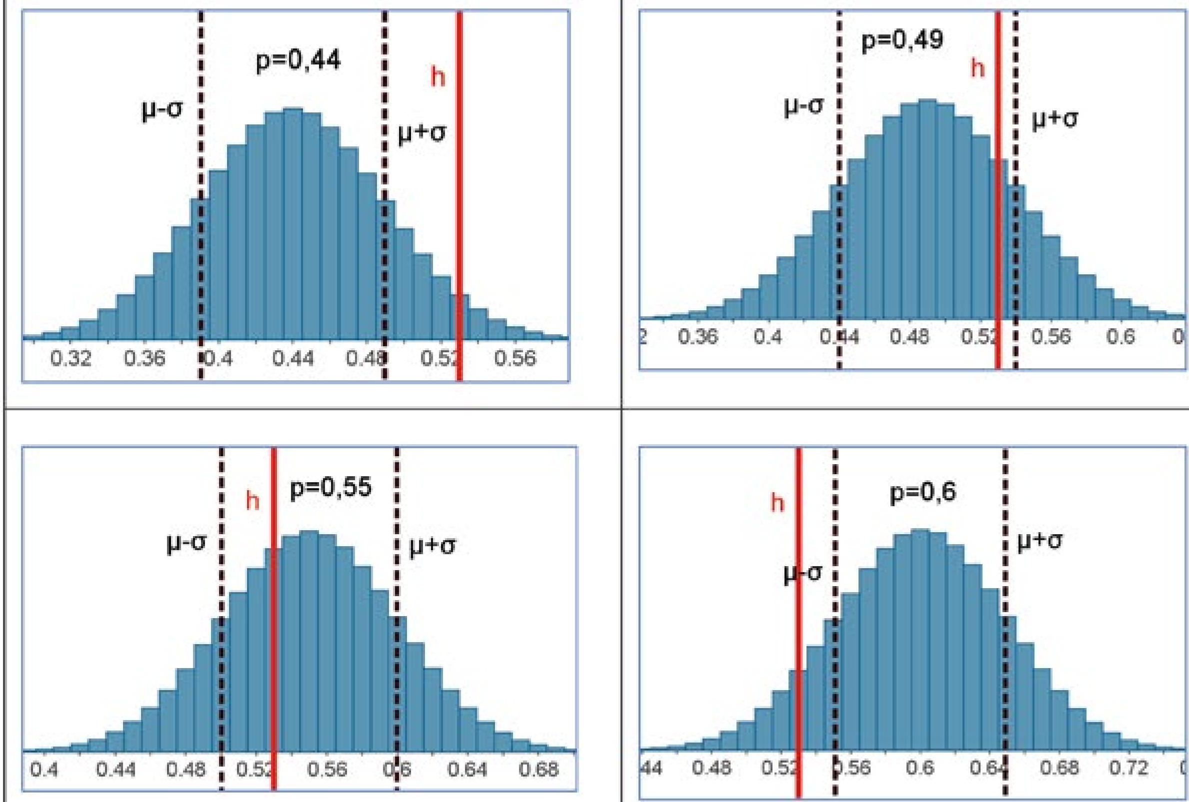


Abbildung 4

b) Geben Sie mithilfe der von Ihnen ausgewählten Abbildung näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(4 < X < 7)$ und die Wahrscheinlichkeit $P(X \neq 5)$ an.

Aufgabe 3.7.9			AHR L5.6	D

Eine Umfrage zu einer Bürgermeisterwahl hat ergeben, dass 53 % Kandidat A wählen würden. Der Kandidat möchte nun von Ihnen wissen, wie groß seine Chancen für eine Wahl sind. Schreiben Sie einen Bericht. Benutzen Sie dazu die Grafiken und werten Sie diese aus.



Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.10			AHR L5.7	D

Zur Fußball-Weltmeisterschaft 2014 in Brasilien wurde ein Sammelbuch für die 23 Bilder der deutschen Nationalspieler auf den Markt gebracht. Die zu kaufenden Bilder sind einzeln in undurchsichtiger Folie verpackt. Im Folgenden wird angenommen, dass von jedem Spieler gleich viele Bilder auf dem Markt sind.

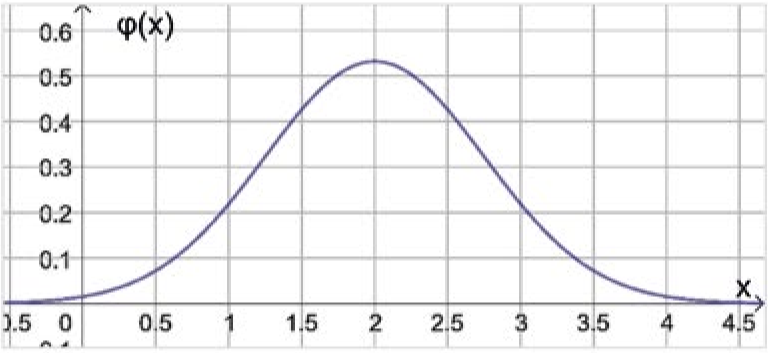
Die Zufallsgröße X zählt die Anzahl der gekauften Bilder, die Torwart Neuer zeigen, und wird als binomialverteilt angenommen.
Ein Supermarkt hat 1000 Bilder im Angebot. Geben Sie die Bedeutung des folgenden Intervalls im Sachzusammenhang an:

$$\left[1000\cdot\frac{1}{23}-1{,}96\cdot\sqrt{1000\cdot\frac{1}{23}\cdot\frac{22}{23}}\;;\;1000\cdot\frac{1}{23}+1{,}96\cdot\sqrt{1000\cdot\frac{1}{23}\cdot\frac{22}{23}}\right].$$

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.11			AHR L5.9	D

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion φ einer normalverteilten Zufallsgröße X.



a) Begründen Sie, dass der Erwartungswert μ der Zufallsgröße X ungefähr 2 ist.

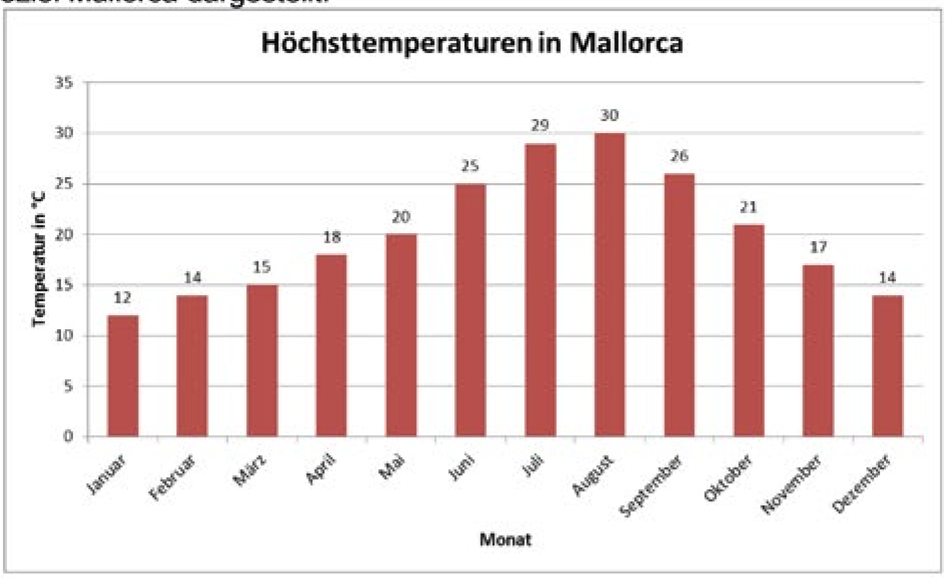
b) Bestimmen Sie mithilfe des Graphen einen Näherungswert für die Standardabweichung σ der Zufallsgröße X.

c) Die Zufallsgröße X nimmt Werte aus einem um $\mu = 2$ symmetrischen Intervall mit der Wahrscheinlichkeit $1 - 2 \cdot P(X < \mu - 0{,}5)$ an.
Geben Sie die Grenzen des Intervalls an.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.12			AHR L5.1	D

In der Abbildung werden die durchschnittlichen Tageshöchsttemperaturen je Monat für das Reiseziel Mallorca dargestellt.



a) Ermitteln Sie Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel und Standardabweichung für die gegebenen Daten.

b) Verfassen Sie einen kurzen Bericht über die jährliche Entwicklung der Höchsttemperaturen auf Mallorca.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.13			AHR L5.2; L5.4	D

In einem Supermarkt werden Bio-Paprika verkauft. Da bei den Bio-Paprika auf den Einsatz von Pflanzenschutzmitteln verzichtet wird, kommt es hier häufiger vor, dass eine Paprika faulig ist. Der Großhändler versichert, dass bei den Bio-Paprika der Anteil fauliger Früchte bei unter 5 % liegt. Der Supermarktbetreiber möchte diese Behauptung überprüfen und zählt eine Woche lang die Anzahl fauliger Früchte je Karton Bio-Paprika. Der Supermarktbetreiber hat herausgefunden, dass in dieser Woche lediglich 3,8 % der Paprika faulig waren. Leider ist seine Liste nicht mehr vollständig.

Faulige Früchte je Karton	0	1	2	3	4
Relative Häufigkeit	55 %	15 %	15 %		

Ermitteln Sie die fehlenden Werte, wenn in einem Karton 25 Früchte enthalten sind.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

Aufgabe 3.7.14			AHR L5.2; L5.4	D

Aus 15 Glühlampen, von denen 5 defekt sind, werden zufällig 3 Glühlampen ausgewählt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 3 Glühlampen
   (1) keine defekt,
   (2) genau 2 defekt bzw.
   (3) mindestens eine defekt ist.

b) Bei einem Einsatz von 1 € kann darauf gewettet werden, dass bei der obigen Ziehung genau 2 Glühlampen defekt sind.
   Berechnen Sie, wie groß der Gewinn sein muss, damit sich dieses Spiel für den Spieler lohnt.

Prozessbezogene Kompetenz: Argumentieren

4. Kompetenzen

4.1 Kompetenzen gemäß der Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss (MSA)

Leitidee: Zahl (MSA; L1)

Die Schülerinnen und Schüler …

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit [MSA; L1.1],
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise [MSA; L1.2],
- begründen die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen an Beispielen [MSA; L1.3],
- nutzen Rechengesetze, auch zum vorteilhaften Rechnen [MSA; L1.4],
- nutzen zur Kontrolle Überschlagsrechnungen und andere Verfahren [MSA; L1.5],
- runden Rechenergebnisse entsprechend dem Sachverhalt sinnvoll [MSA; L1.6],
- verwenden Prozent- und Zinsrechnung sachgerecht [MSA; L1.7],
- erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge [MSA; L1.8],
- wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen [MSA; L1.9],
- führen in konkreten Situationen kombinatorische Überlegungen durch, um die Anzahl der jeweiligen Möglichkeiten zu bestimmen [MSA; L1.10],
- prüfen und interpretieren Ergebnisse in Sachsituationen unter Einbeziehung einer kritischen Einschätzung des gewählten Modells und seiner Bearbeitung [MSA; L1.11].

Leitidee: Messen (MSA; L2)

Die Schülerinnen und Schüler …

- nutzen das Grundprinzip des Messens, insbesondere bei der Längen-, Flächen- und Volumenmessung, auch in Naturwissenschaften und in anderen Bereichen [MSA; L2.1],
- wählen Einheiten von Größen situationsgerecht aus (insbesondere für Zeit, Masse, Geld, Länge, Fläche, Volumen und Winkel) [MSA; L2.2],
- schätzen Größen mit Hilfe von Vorstellungen über geeignete Repräsentanten [MSA; L2.3],
- berechnen Flächeninhalt und Umfang von Rechteck, Dreieck und Kreis sowie daraus zusammengesetzten Figuren [MSA; L2.4],
- berechnen Volumen und Oberflächeninhalt von Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel und Kugel sowie daraus zusammengesetzten Körpern [MSA; L2.5],

- berechnen Streckenlängen und Winkelgrößen, auch unter Nutzung von trigonometrischen Beziehungen und Ähnlichkeitsbeziehungen [MSA; L2.6],
- nehmen in ihrer Umwelt gezielt Messungen vor, entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen damit Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg in Bezug auf die Sachsituation [MSA; L2.7].

Leitidee: Raum und Form (MSA; L3)

Die Schülerinnen und Schüler …

- erkennen und beschreiben geometrische Strukturen in der Umwelt [MSA; L3.1],
- operieren gedanklich mit Strecken, Flächen und Körpern [MSA; L3.2],
- stellen geometrische Figuren im kartesischen Koordinatensystem dar [MSA; L3.3],
- stellen Körper (z. B. als Netz, Schrägbild oder Modell) dar und erkennen Körper aus ihren entsprechenden Darstellungen, analysieren und klassifizieren geometrische Objekte der Ebene und des Raumes [MSA; L3.4],
- beschreiben und begründen Eigenschaften und Beziehungen geometrischer Objekte (wie Symmetrie, Kongruenz, Ähnlichkeit, Lagebeziehungen) und nutzen diese im Rahmen des Problemlösens zur Analyse von Sachzusammenhängen [MSA; L3.5],
- wenden Sätze der ebenen Geometrie bei Konstruktionen, Berechnungen und Beweisen an, insbesondere den Satz des Pythagoras und den Satz des Thales [MSA; L3.6],
- zeichnen und konstruieren geometrische Figuren unter Verwendung angemessener Hilfsmittel wie Zirkel, Lineal, Geodreieck oder dynamische Geometriesoftware [MSA; L3.7],
- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von Konstruktionsaufgaben und formulieren diesbezüglich Aussagen [MSA; L3.8],
- setzen geeignete Hilfsmittel beim explorativen Arbeiten und Problemlösen ein [MSA; L3.9].

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (MSA; L4)

Die Schülerinnen und Schüler …

- nutzen Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge [MSA; L4.1],
- erkennen und beschreiben funktionale Zusammenhänge und stellen diese in sprachlicher, tabellarischer oder graphischer Form sowie gegebenenfalls als Term dar [MSA; L4.2],
- analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche Darstellungen funktionaler Zusammenhänge (wie lineare, proportionale und antiproportionale) [MSA; L4.3],
- lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen [MSA; L4.4],
- interpretieren lineare Gleichungssysteme graphisch [MSA; L4.5],
- lösen Gleichungen, und lineare Gleichungssysteme kalkülmäßig bzw. algorithmisch, auch unter Einsatz geeigneter Software, und vergleichen ggf. die Effektivität ihres Vorgehens mit anderen Lösungsverfahren (wie mit inhaltlichem Lösen oder Lösen durch systematisches Probieren) [MSA; L4.6],

- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen [MSA; L4.7],
- bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen und stellen Beziehungen zwischen Funktionsterm und Graph her [MSA; L4.8],
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an [MSA; L4.9],
- verwenden die Sinusfunktion zur Beschreibung von periodischen Vorgängen [MSA; L4.10],
- beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen, auch unter Verwendung eines Tabellenkalkulationsprogramms [MSA; L4.11],
- geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können [MSA; L4.12].

Leitidee: Daten und Zufall (MSA; L5)

Die Schülerinnen und Schüler …

- werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus [MSA; L5.1],
- planen statistische Erhebungen [MSA; L5.2],
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software) [MSA; L5.3],
- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen [MSA; L5.4],
- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren [MSA; L5.5],
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen [MSA; L5.6],
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten [MSA; L5.7].

4.2 Kompetenzen gemäß der Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (AHR)

Leitidee: Algorithmus und Zahl (AHR; L1)

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- geeignete Verfahren zur Lösung von Gleichungen und Gleichungssystemen auswählen [AHR; L1.1],
- ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme erläutern und es anwenden [AHR; L1.2],
- Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen [AHR; L1.3],
- einfache Sachverhalte mit Tupeln oder Matrizen beschreiben [AHR; L1.4],
- mathematische Prozesse durch Matrizen unter Nutzung von Matrizenmultiplikation und inverser Matrizen beschreiben (A1)[1] [AHR; L1.5].

Die Schülerinnen und Schüler aus Kursen mit erhöhtem Anforderungsniveau können darüber hinaus ...

- Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen nutzen (A1) [AHR; L1.6],
- Grenzmatrizen sowie Fixvektoren interpretieren (A1) [AHR; L1.7].

Leitidee: Messen (AHR; L2)

Die Schülerinnen und Schüler können ...

- Streckenlängen und Winkelgrößen im Raum auch mithilfe des Skalarprodukts bestimmen [AHR; L2.1],
- Sekanten- und Tangentensteigungen an Funktionsgraphen bestimmen [AHR; L2.2],
- Änderungsraten berechnen und deuten [AHR; L2.3],
- Inhalte von Flächen, die durch Funktionsgraphen begrenzt sind, bestimmen [AHR; L2.4],
- Bestände aus Änderungsraten und Anfangsbestand berechnen [AHR; L2.5],
- Lage- und Streumaße einer Stichprobe bestimmen und deuten [AHR; L2.6],
- Erwartungswert und Standardabweichung diskreter Zufallsgrößen bestimmen und deuten [AHR; L2.7],

Die Schülerinnen und Schüler aus Kursen mit erhöhtem Anforderungsniveau können darüber hinaus ...

- Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen bestimmen (A2)[2] [AHR; L2.8],
- das Volumen von Körpern bestimmen, die durch Rotation um die Abszissenachse entstehen [AHR; L2.9],

---

[1] Schwerpunkt Beschreibung mathematischer Prozesse durch Matrizen
[2] Schwerpunkt vektorielle Analytische Geometrie

Leitidee: Raum und Form (AHR; L3)

Die Schülerinnen und Schüler können …

- geometrische Sachverhalte in Ebene und Raum koordinatisieren [AHR; L3.1],
- elementare Operationen mit geometrischen Vektoren ausführen und Vektoren auf Kollinearität untersuchen [AHR; L3.2],
- das Skalarprodukt geometrisch deuten [AHR; L3.3],
- Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig bzw. ebenflächig begrenzten geometrischen Objekten anwenden (A2) [AHR; L3.4],
- Geraden und Ebenen analytisch beschreiben und die Lagebeziehungen von Geraden untersuchen (A2) [AHR; L3.5].

Die Schülerinnen und Schüler aus Kursen mit erhöhtem Anforderungsniveau können darüber hinaus …

- die Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen untersuchen (A2) [AHR; L3.6].

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang (AHR; L4)

Die Schülerinnen und Schüler können …

- die sich aus den Funktionen der Sekundarstufe I ergebenden Funktionsklassen zur Beschreibung und Untersuchung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen [AHR; L4.1],
- in einfachen Fällen Verknüpfungen und Verkettungen von Funktionen zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge nutzen [AHR; L4.2],
- die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten [AHR; L4.3],
- Änderungsraten funktional beschreiben (Ableitungsfunktion) und interpretieren [AHR; L4.4],
- die Funktionen der Sekundarstufe I ableiten, auch unter Nutzung der Faktor- und Summenregel [AHR; L4.5],
- die Produktregel zum Ableiten von Funktionen verwenden [AHR; L4.6],
- die Ableitung zur Bestimmung von Monotonie und Extrema von Funktionen nutzen [AHR; L4.7],
- den Ableitungsgraphen aus dem Funktionsgraphen und umgekehrt entwickeln [AHR; L4.8],
- das bestimmte Integral deuten, insbesondere als (re-)konstruierten Bestand [AHR; L4.9],
- geometrisch-anschaulich den Hauptsatz als Beziehung zwischen Ableitungs- und Integralbegriff begründen [AHR; L4.10],
- Funktionen mittels Stammfunktionen integrieren [AHR; L4.11],
- Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen zur Beschreibung stochastischer Situationen nutzen [AHR; L4.12].

Die Schülerinnen und Schüler aus Kursen mit erhöhtem Anforderungsniveau können darüber hinaus …

- die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten [AHR; L4.13],
- Kettenregel zum Ableiten von Funktionen verwenden [AHR; L4.14],
- die ln-Funktion als Stammfunktion von $x \rightarrow \frac{1}{x}$ und als Umkehrfunktion der e-Funktion nutzen [AHR; L4.15].

Leitidee: Daten und Zufall (AHR; L5)

Die Schülerinnen und Schüler können …

- exemplarisch statistische Erhebungen planen und beurteilen [AHR; L5.1],
- Sachverhalte mithilfe von Baumdiagrammen oder Vierfeldertafeln untersuchen und damit Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten lösen [AHR; L5.2],
- Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente auf stochastische Unabhängigkeit anhand einfacher Beispiele untersuchen [AHR; L5.3],
- die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen nutzen [AHR; L5.4],
- Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen verwenden [AHR; L5.5],
- in einfachen Fällen aufgrund von Stichproben auf die Gesamtheit schließen [AHR; L5.6].

Die Schülerinnen und Schüler aus Kursen mit erhöhtem Anforderungsniveau können darüber hinaus …

- für binomialverteilte Zufallsgrößen Aussagen über die unbekannte Wahrscheinlichkeit sowie die Unsicherheit und Genauigkeit dieser Aussagen begründen (B1)[3] [AHR; L5.7],
- Hypothesentests interpretieren und die Unsicherheit und Genauigkeit der Ergebnisse begründen (B2)[4] [AHR; L5.8],
- exemplarisch diskrete und stetige Zufallsgrößen unterscheiden und die „Glockenform“ als Grundvorstellung von normalverteilten Zufallsgrößen nutzen [AHR; L5.9],
- stochastische Situationen untersuchen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen [AHR; L5.10].

[3] Schwerpunkt Schätzung von Parametern
[4] Schwerpunkt Testung von Hypothesen

5. Anhang

5.1 Abbildungsverzeichnis

Die Grafiken zu den Aufgaben 3.2.1, 3.2.2, 3.2.16, 3.3.3, 3.3.11, 3.3.16, 3.3.20, 3.3.27, 3.4.18, 3.4.20, 3.5.11, 3.5.12, 3.5.13, 3.5.14, 3.5.19, 3.5.21, 3.5.25, 3.6.2, 3.7.2, 3.7.8, 3.7.9 und 3.7.11 wurden mit GeoGebra erstellt. Der Abdruck erfolgt mit freundlicher Genehmigung des International GeoGebra Institute (Austria). Copyright © International GeoGebra Institute, 2016

Die Grafiken zu den Aufgaben 3.2.2, 3.3.10 und 3.5.28 wurden von Henning Körner erstellt und zum Abdruck freigegeben.

Die Grafik zur Aufgabe 3.2.9 wurde von Lothar Precht erstellt und zum Abdruck freigegeben.

Das Foto zur Aufgabe 3.4.2 wurde von Ulf Herrmann Krüger erstellt und zum Abdruck freigegeben.

Das Foto zur Aufgabe 3.4.5 wurde von Dr. Mathias Trauschke erstellt und zum Abdruck freigegeben.

Die Grafik zur Aufgabe 3.7.12 wurde von Hanna Wenke erstellt und zum Abdruck freigegeben.

An der Erstellung des Basispapiers Mathematik waren aus dem Institutionalisierten Gesprächskreis Mathematik Schule – Hochschule (IGeMa) die nachstehend genannten Personen beteiligt:

Für die Schulen im Land Niedersachsen:
Jan Block, Fachberater für Mathematik (RA Braunschweig)
Wilhelm Bredthauer, MNU Landesverband Niedersachsen
Christoph Dönges, MNU Landesverband Niedersachsen
Henning Körner, Fachleiter für Mathematik (Studienseminar Oldenburg)
Ulf-Herrmann Krüger, Fachberater für Mathematik (RA Hannover)
Sabine Meyer, Fachberaterin für Mathematik (RA Lüneburg)
Dr. Jörg Meyer, Fachleiter a.D. für Mathematik (Studienseminar Hameln)
Hans-Dieter Stenten-Langenbach, Fachberater für Mathematik (RA Osnabrück)
Tanja Wehrse, Fachberaterin für Mathematik (RA Hannover)

Für die Hochschulen / Landeshochschulkonferenz im Land Niedersachsen:
Prof. Dr. Volker Bach, Technische Universität Braunschweig
Prof. Dr. Jürgen Biermann, Hochschule Osnabrück
Dr. Brit-Maren Block, Universität Lüneburg
Apl. Prof. Dr. Anne Frühbis-Krüger, Universität Hannover
Prof. Dr. Reinhard Hochmuth, Universität Hannover
Prof. Dr. Nils Jensen, Hochschule Braunschweig/Wolfenbüttel
Prof. Dr. Dirk Langemann, Technische Universität Braunschweig
Dr. Florian Leydecker, Universität Hannover
Prof. Dr. Dirk Rabe, Hochschule Emden/Leer
Prof. Dr. Alexander Salle, Universität Osnabrück
Prof. Dr. Alexander Schmehmann, Hochschule Osnabrück
Prof. Dr. Kathrin Thiele, Hochschule Braunschweig/Wolfenbüttel

↑ zurück zum Inhalt

Impressum

Niedersächsisches Kultusministerium
Schiffgraben 12
30159 Hannover

Niedersächsisches Ministerium
für Wissenschaft und Kultur
Leibnizufer 9
30169 Hannover

www.mk.niedersachsen.de
www.mwk.niedersachsen.de

März 2019